甘肃省

中学数学复习资料

甘肃人民出版社

目　　录

立　体　几　何

平　面　三　角

平面解析几何

综合题选解

立 体 几 何

一、空间直线与平面

1. 平面的性质

（1） 如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线也就在这个平面内。

（2） 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线。

（3） 不在一条直线上的三点确定一个平面。

由性质（3）可以推出：

① 一条直线和直线外一点确定一个平面。

② 两条相交直线确定一个平面。

③ 两条平行直线确定一个平面。

2. 直线和平面

（1） 直线和直线的位置关系

重合——在同一个平面内，有无数公共点。

平行——在同一个平面内，没有公共点。

相交——在同一个平面内，只有一个公共点。

垂直——相交成直角。

异面（相错）—不在同一个平面内，既不平行，又不相交。

垂直——两条异面直线所成的角是直角。

（2） 直线和平面的位置关系

直线在平面内——直线上的点全在平面内。

直线和平面平行——直线和平面没有公共点.

直线和平面相交——直线和平面只有一个公共点.

直线和平面垂直——直线和平面内的任何一条直线都垂直。

（3） 平面和平面的位置关系

重合——两个平面有无数公共点，且这些点不全在一条直线上.

平行——两个平面没有公共点。

相交——两个平面公有一条直线。

垂直——两个相交平面的夹角是直角。

直线和平面的关系见下页图示.

3． 角

（1） 异面直线所成的角——过一点与两条异面直线分别平行的两条射线所成的角.

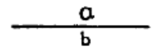
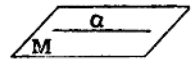
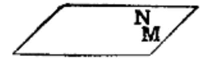
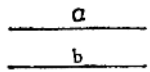
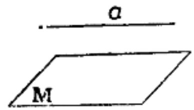
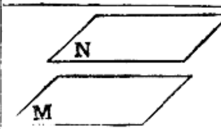
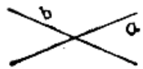
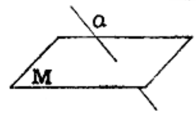
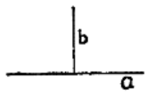
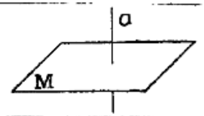
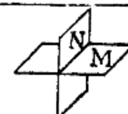
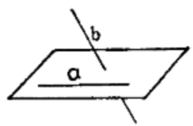
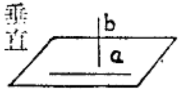
（2） 直线和平面所成的角——一个平面的斜线和它在这个平面上的射影所成的角.

（3） 相交平面的夹角

一个平面内的一条直线把这个平面分成两部分，每一部分叫做半平面，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角. 这条直线叫做二面角的棱；这两个半平面叫做二面角的面.

从二面角的棱上任意一点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.

两个相交平面的夹角，就是指它们所成二面角的平面角.

	直线和直线	直线和平面	平面和平面
重合			
平行			
相交			
	垂直 		
异面	 垂直 		

4. 距离

（1） 平面外的点到平面的距离——从平面外的点向平面引垂线，这点到垂足间线段的长。

（2） 互相平行的直线和平面之间的距离——一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到这个平面的距离。

（3） 两个平行平面之间的距离——夹在两个平行平面之间的垂线的长。

5. 直线和平面位置关系的判定

（1） 直线和直线平行

如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。

如果两个平行平面分别与第三个平面相交，那么它们的交线平行。

（2） 直线和平面平行

如果平面外的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

（3） 平面和平面平行

如果两条相交直线分别和同一个平面平行，那么过这两条直线的平面也和这个平面平行。

如果两个平面都垂直于同一条直线，那么这两个平面互相平行。

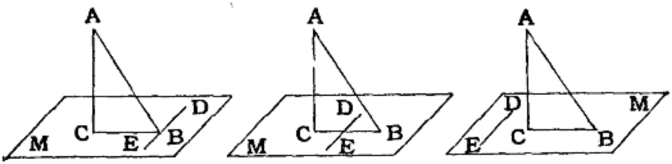
（4） 直线和直线垂直

平面内的一条直线，如果和这平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直（三垂线定理）。

平面内的一条直线，如果和这平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在这平面上的射影垂直（三垂线定理的逆

定理）。

下面证明三垂线定理（逆定理自己证明）：



已知：AC、AB分别是平面M的垂线和斜线，BC是AB在平面M上的射影，DE在平面M内，$DE\perp BC$。

求证：$DE\perp AB$。

证明：$\because$ $AC\perp$平面M，DE在平面M内，

$\therefore$ $AC\perp DE$。

$\because$ $DE\perp BC$，

$\therefore$ DE垂直于BC和AC所确定的平面。

$\therefore$ AB在BC和AC所确定的平面内。

$\therefore$ $DE\perp AB$。

（5） 直线和平面垂直

如果一条直线和平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线和这个平面垂直。

如果两条平行直线中的一条直线垂直于一个平面，那么，另一条也垂直于这个平面。

（6） 平面和平面垂直

如果一个平面通过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直。

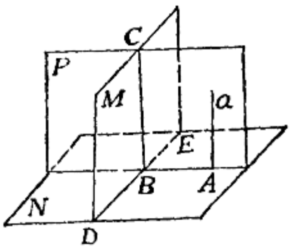
6． 角、线段相等的有关定理

（1） 如果一个角的两边，分别与另一个角的两边平行，并且方向相同，那么这两个角相等。

（2） 夹在两个平行平面间的平行线段相等。

例 题

例1 如果平面M和不在平面M上的直线a都垂直于平面N，那么，直线a和平面M平行。



已知：直线a不在平面M上，且直线a、平面M都垂直于平面N。

求证：直线a∥平面M。

证明：设直线a与平面N的交点为A，平面M与平面N的交线为DE．在平面N内自A向DE引垂线AB，过a和AB作平面P，

∵ $a\perp$平面N，

∴ 平面$P\perp$平面N．

∵ 平面$M\perp$平面N，

∴ 平面P与平面M的交线$BC\perp$平面N，

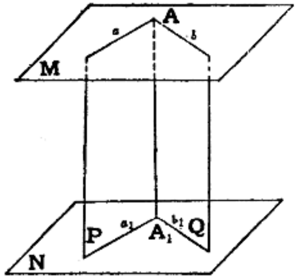
∴ 直线a∥直线BC，

∴ a∥平面M．

例2 如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个，那么也垂直于另一个。

已知：平面M∥平面N，$AA_1\perp$平面M．

求证：$AA_1 \perp$平面N。



证明：过AA_1作平面P、Q分别与平面M、N交于a、a_1和b、b_1。

∵ $AA_1 \perp$平面M，

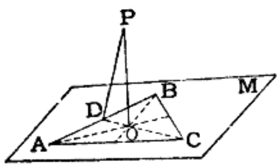
∴ $AA_1 \perp a$，$AA_1 \perp b$。

但$a \parallel a_1$，$b \parallel b_1$（如果两个平行平面分别与第三个平面相交，那么它们的交线平行）。

∴ $AA_1 \perp a_1$，$AA_1 \perp b_1$，

∴ $AA_1 \perp$平面N。

例3　过边长为18cm的正三角形ABC的中心O，作一条长为13cm，并且垂直于$\triangle ABC$所在平面M的线段OP，求点P到正三角形ABC各边的距离。



解：作$OD \perp AB$，与AB交于D，连结PD。

∵ $OD \perp AB$，

∴ $PD \perp AB$（三垂线定理）。

∴ PD是点P到AB的距离。

∵ $PO \perp$平面M，

∴ $PO \perp OD$。

$$PD = \sqrt{PO^2 + OD^2}.$$

但O为正三角形ABC的中心，

∴ D为AB的中点。

$$OD = AD \times tg30^\circ$$
$$= 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$= 3\sqrt{3}(cm).$$

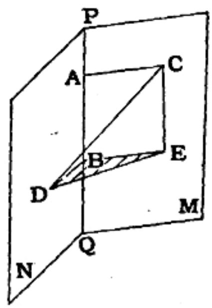
$\therefore$ $PD = \sqrt{169 + 27} = 14(cm)$.

由于O为正三角形ABC的中心，它到$\triangle ABC$的三边的距离相等，因此P点到$\triangle ABC$的三边的距离也相等，即都是$14cm$。

答：点P到正三角形ABC的各边的距离是$14cm$。

例4 设A、B为平面M、平面N交线PQ上的两点，AC、BD分别在两个平面内且与PQ垂直，如果这两个平面的夹角为120°，$AC = AB = BD = a$，求CD的长。

解：在平面M内，过B作$BE \parallel AC$，且$BE = AC$。那么，$ABEC$是正方形，$\angle EBD = 120^\circ$。



$\because$ $CE \perp BE$，

$CE \perp BD$（CE与BD所成的角是直角），

$\therefore$ $CE \perp$平面EBD。

$\therefore$ $CE \perp ED$。

在$\triangle EBD$中，

$\because$ $BD = BE = a$，$\angle EBD = 120^\circ$，

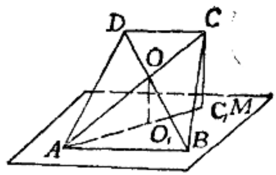
$\therefore$ $DE = 2a\sin60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$。

在$\triangle CED$中，

∵ $CE \perp ED$，$CE = AB = a$，$DE = \sqrt{3}a$，

∴ $CD = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + a^2} = 2a$.

例5 梯形$ABCD$的一底AB在平面M内，另一底DC在平面M外，而和平面M相距5 cm。已知$AB:DC = 7:3$，求这梯形的对角线的交点O到平面M的距离.



解：作梯形$ABCD$的对角线AC在平面M内的射影AC_1，则CC_1就是DC到平面M的距离，

∴ $CC_1 = 5cm$.

自梯形的对角线交点O向平面M引垂线OO_1，则垂足O_1一定在线段AC_1上.

∵ OO_1，CC_1都垂直于平面M，

∴ $OO_1 \parallel CC_1$.

∴ $\triangle AO_1O \backsim \triangle AC_1C$，

因此，$\dfrac{OO_1}{CC_1} = \dfrac{AO}{AC}$.

∴ $\dfrac{OO_1}{CC_1 - OO_1} = \dfrac{AO}{AC - AO} = \dfrac{AO}{CO}$.

∵ 在梯形$ABCD$中，$\triangle AOB \backsim \triangle COD$，

∴ $\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{AB}{DC}$，

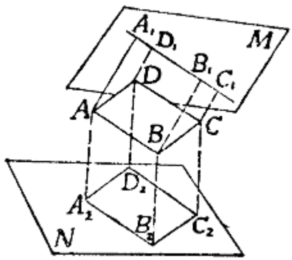
∵ $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{7}{3}$，

∴ $\dfrac{OO_1}{5 - OO_1} = \dfrac{7}{3}$.

$\therefore\quad OO_1=3.5(cm)$。

答：梯形对角线的交点O到平面M的距离为$3.5cm$。

例6　A、B、C、D为平面M、N外的四点，它们在平面M内的射影为A_1、B_1、C_1、D_1，在平面N内的射影为A_2、B_2、C_2、D_2。已知A_1、B_1、C_1、D_1在一条直线上，$A_2B_2C_2D_2$为平行四边形。求证$ABCD$为一平行四边形。



已知：A、B、C、D为平面M、N外四点，它们在平面M上的射影A_1、B_1、C_1、D_1在一条直线上，在平面N内的射影为A_2、B_2、C_2、D_2，$A_2B_2C_2D_2$为平行四边形。

求证：$ABCD$为平行四边形。

证明：$\because\quad A_1$、B_1、C_1、D_1在平面M内的一条直线上，

$\therefore\quad A$、B、C、D四点在与平面M垂直的同一平面内。

$\because\quad A_2B_2C_2D_2$为平行四边形，

$\therefore\quad A_2B_2\parallel C_2D_2$。

因此，过平面N的垂线AA_2、BB_2和CC_2、DD_2的两个平面AB_2、CD_2互相平行。

$\therefore\quad AB\parallel CD$。

同理，$BC\parallel AD$。

$\therefore\quad ABCD$为平行四边形。

习　题

1. 三条直线两两平行，但不在同一平面内，如果过其中任意两条各作一个平面，共可作几个平面？　　答：三个

2. 空间有四个点，每三点都不在一直线上，过其中任意三点作一个平面，共可作几个平面？　　答：四个

3. 一条直线和两条异面直线都相交，这三条直线共可确定几个平面？　　答：二个

4. 已知A、B、C、D是空间四点，AB、CD是异面直线，用反证法证明AC和BD、AD和BC也都是异面直线。

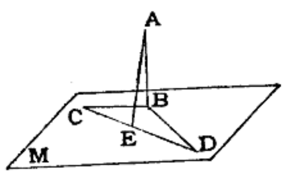
5. 求证：若AB、BC、CD为不在同一平面内的三条线段，那么，过它们中点的平面平行于AC和BD。

6. 求证：如果一条直线和两条平行直线中的一条垂直（不一定相交），那么也和另一条垂直（不一定相交）。

7. 不全在同一平面内的若干线段，首尾相接，并且最后一条的尾端与最初一条的首端重合，这样组成的图形叫做空间多边形。求证顺次连结空间四边形的各边中点，必成一个平行四边形。

8. a和b是两条异面直线，求证过a而平行于b的平面必与过b而平行于a的平面平行。

9. 如图所示，线段$AB=5$厘米，线段BC、BD都和AB垂直，$BC=BD=6$厘米，$\angle CBD=120°$，E为CD的中点。



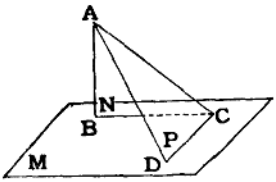
（第9题）

（1）BE和AB成什么角度？CD和AB成什么角度？

（2） AE的长等于多少？

答：（1）90°；（2）$\sqrt{34}$厘米

10．三角形各边的长是10cm、17cm和21cm，过它的最大角的顶点引它所在平面的垂线，设垂线的长是15cm，求这垂线的两端到这三角形的最大边的距离。　　答：8和17



（第11题）

11．如图，AB是平面M的垂线，AC是平面M的斜线，DC在平面M内而和AC垂直．求证：AB、AC所确定的平面N和AC、DC所确定的平面P垂直。

12．求证：（1）不在同一平面内的三条直线互相平行，且与两个平行平面相交，在每一平面内以交点为顶点所作的两个三角形全等。

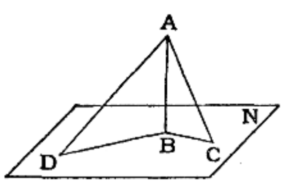
（2）不在同一平面内的三条直线相交于一点，并且与两个平行平面相交，在每一平面内以交点为顶点所作的两个三角形相似。

13．自平面外一点D至平面作三斜线，每一斜线与已知平面成60°的角，斜线足为A、B、C，连结线段AB、BC、CA。如果点D到平面的距离等于a，而$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA$，求三角形$ABC$各边长。　　答：$a$

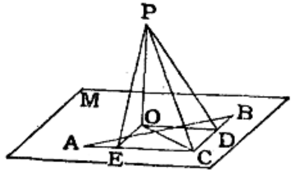
提示：首先证明$\triangle ABC$为等边三角形。

14．如果平面N外有一点A，平面N上有两点C、D，AC、AD的长分别为30厘米及51厘米，并且这两条线段在平面N内的射影的比为2：5，求这点到平面N的距离。

答：24厘米



（第14题）



（第15题）

15. 直角三角形ABC所在的平面M外有一点P. 已知P点到直角顶点C的距离是24厘米， 到两条直角边的距离都是$6\sqrt{10}$厘米. 求：（1）点P到平面M的距离； 答：12厘米

（2）PC与平面M的夹角. 答：30°

16. 一菱形的一边在平面M上，而它的对边高出平面M 16cm。菱形的对角线在平面M上的射影分别为32cm和8cm。求菱形的一边长。 答：20cm

17. 二线段夹在二平行平面之间. 此二线段在平面上的射影为1 cm和7 cm。如二线段之差为4cm. 求二线段的长。

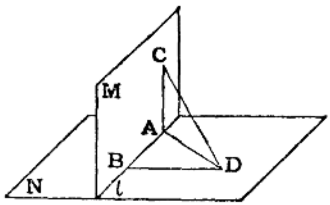
答：8 cm和4 cm

18. 在平面M外有一三角形，它的顶点到平面的距离为4 cm、5 cm和9 cm. 求这个三角形的重心到平面M的距离。

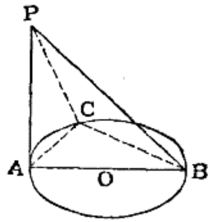
答：6 cm

19. 如图，平面$M\perp$平面N，交线为l. A、B两点在直线l上，AC和BD分别是在这两个平面内垂直于AB的线段。$AC=6\ cm$，$AB=8\ cm$，$BD=24cm$，求CD. 答：26cm

20 如图，AB是⊙O的直径，PA垂直于⊙O所在的平面，C是圆周上的任意一点，求证$\triangle PAC$所在的平面垂直于$\triangle PBC$所在的平面。



（第19题）



（第20题）

21．如果夹在直二面角间的一条线段，在二半平面上的射影分别为21cm和25cm，在棱上的射影为15cm，求这条线段的长。　答：29cm

22．从直二面角的棱上一点在二半平面内引二射线，每一射线都与棱成45°的角，求这二射线之间的夹角．　答：60°

二　柱体、锥体、台体

1．　祖暅原理

夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任何平面所截，如果截得的两个截面的面积相等，那么这两个几何体的体积相等．

2．　柱、锥、台体的基本知识（见下页表1）

附注：（1）　棱锥的一个性质

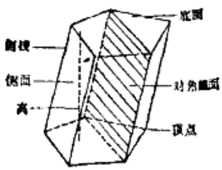
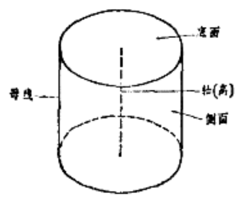
如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么：

①　棱锥的侧棱与高被这平面分为成比例线段；

②　所得的截面是一个与底面相似的多边形；

③　截面面积与底面面积的比，等于由顶点到这两个面

表1　柱体、锥体、台体的基本知识

名称	柱	体
	棱　　柱	圆　　柱（直圆柱）
定义	有两个面互相平行，而其余每相邻两个面的交线也互相平行的几何体。 斜棱柱——侧棱和底面斜交的棱柱。 直棱柱——侧棱和底面垂直的棱柱。 正棱柱——底面是正多边形的直棱柱。	一个矩形绕着它的一条边旋转一周所得的几何体。
图形及有关名词		
性质	1.棱柱的所有侧棱平行且相等；直棱柱的侧棱和高相等。 2.直棱柱的侧面都是矩形；正棱柱的侧面都是互相全等的矩形。 3.棱柱的底面是两个对应边互相平行的全等多边形。平行于底面的截面和底面全等。 4.棱柱的对角截面都是平行四边形；直棱柱的对角截面都是矩形。	1.圆柱的轴垂直于两个底面，它的长等于圆柱的高。 2.圆柱的两个底面是互相平行且相等的圆面；平行于圆柱底面的截面是与底面相等的圆面。 3.平行或经过圆柱的轴的截面是一个矩形，它的一组对边是圆柱的母线，另一组对边是底面圆的弦或直径。