空间解析几何

丰宁欣　孙贤铭

郭孝英　李中林　吴少华

浙江科学技术出版社

空间解析几何

丰宁欣　孙贤铭
郭孝英　李中林　吴少华

浙江科学技术出版社

责任编辑：周伟元

空间解析几何

丰宁欣　　孙贤铭

郭孝英　李中林　吴少华

*

浙江科学技术出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本787×1092　1/32　印张13.5　字数309,000

1982年12月第一版

1982年12月第一次印刷

印数：1—9,000

统一书号：7221·28

定价：1,46元

内 容 提 要

本书是由杭州大学数学系丰宁欣副教授等编写的．全书内容繁简适宜，结构严谨，行文流畅，易于教学，可作为综合性大学、师范院校数学各专业空间解析几何课程的教材或教学参考书，也可作为工科大专院校有关专业的教材或教学参考书，以及中学数学教师和数学爱好者的自学进修用书．

前　　言

由于教学的需要，我们在多年讲授解析几何课程的基础上，参照教育部近年来颁布的高等院校解析几何教学大纲，于一九八〇年编写了《空间解析几何》一书，作为杭州大学数学系一年级空间解析几何课程的教材．经杭州大学数学系和其他一些院校的试用，现整理正式出版．

全书共分六章．第一章到第五章利用直角坐标系讲述空间欧氏几何，是本书的主要内容．第六章简单介绍空间仿射几何的概念，其目的是扩大读者的几何视野，并为以后学习射影几何作准备．为了便于初学者阅读，我们还编写了两个附录．附录Ⅰ简单介绍学习空间解析几何必须具备的线性方程、行列式和矩阵等代数知识．附录Ⅱ比较详细地介绍了二次曲线的一般理论．此外，在每一章的后面都配有一定数量的习题，并将各章习题的答案或提示附于书末，以供参考．

本书可作为综合性大学和师范院校数学各专业空间解析几何课程的教材或教学参考书，也可作为工科大专院校有关专业的教材或教学参考书，以及中学数学教师和数学爱好者自学进修用书．

本书是我们共同讨论，编写的，主要由丰宁欣副教授执笔．限于水平，书中如有不妥之处，热忱希望读者指正．

编　者

1982.3.

目　　录

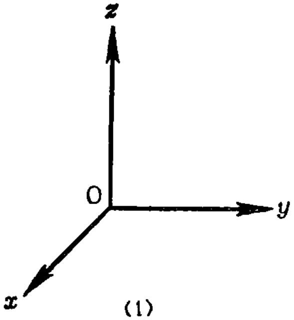
第一章　空间直角坐标系　曲面和曲线的方程

空间解析几何的主要内容，是用代数方法研究空间常见的曲面和曲线的性质．为了用代数方法研究几何图形，首先要在空间引进坐标系，使空间的点与数建立对应关系；并在此基础上，把曲面和曲线看作点的几何轨迹，就可建立曲面和曲线与方程之间的对应关系．这一章介绍空间直角坐标系，以及在直角坐标系下曲面和曲线的方程．

§ 1　空间直角坐标系

在空间任取一点O，过点O作三条两两互相垂直的轴（规定了正方向的直线）Ox、Oy、Oz，再取定一个线段作为长度单位．这样我们就在空间建立了一个坐标系．这是一种最常用的坐标系，称为**空间直角坐标系**．点O称为**坐标原点**；直线Ox、Oy、Oz称为**坐标轴**，依次称为x轴、y轴、z轴；由每两条坐标轴所决定的平面xOy、yOz、zOx称为**坐标平面**．

如果在空间直角坐标系中，x轴、y轴和z轴的顺序按图1—1(1)所示，将右手的拇指、食指分别指着x轴和y轴的正向时，中指正好指着z轴的正向，则称这坐标系为**右手系**；如果按图1—1(2)所示，将左手的拇指、食指分别指着x轴和y轴的正向时，中指正好指着z轴的正向，则称这坐标系为**左手系**．今后我们采用右手坐标系．



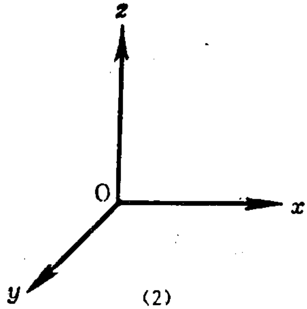


图1—1

在空间建立了坐标系后，就可以用数组来确定点的位置.

设P是空间任意一点，过P作平行于坐标平面yOz、zOx、xOy的平面，分别交坐标轴Ox、Oy、Oz于点A、B、C(图1—2). 以x、y和z分别表示点A、B和C在x轴、y轴和z轴上的坐标，即$x=OA$; $y=OB$, $z=OC$，其中OA、OB、OC分别是有向线段$\overline{OA}$、$\overline{OB}$，$\overline{OC}$的代数长. 这样就得到唯一确定的有序实数组(x, y, z)与点P对应.

反过来，任意给定一组有序实数(x, y, z)，就可在x轴、y轴和z轴上确定三个点A、B和C，使它们在坐标轴上的坐标分别为x、y和z. 经过A、B、C分别作平面平行于坐标平面yOz、zOx、xOy，这三个平面互相垂直，相交于一点P. 这就是说，对任意一个有序实数组(x, y, z)，在空间有唯一确定的点P与它

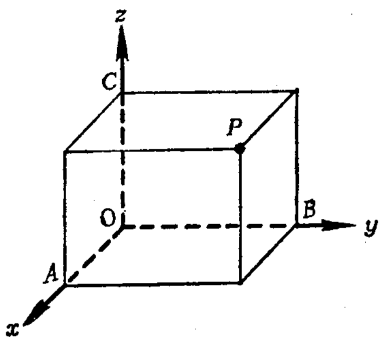


图1—2

对应.

根据上面的讨论，我们得到，在空间建立直角坐标系后，空间的所有点和全体有序实数组 (x, y, z) 之间就有了一一对应的关系. 我们把点 P 所对应的有序数组 (x, y, z) 叫做点 **P 的坐标**，并把 x、y、z 依次称为点 P 的 **x 坐标**、**y 坐标**、**z 坐标**.

由点的坐标的定义可知，在平面 xOy 上的点的 z 坐标为零，在平面 yOz 上的点的 x 坐标为零，在平面 zOx 上的点的 y 坐标为零. 在 x 轴上的点的 y 坐标和 z 坐标都等于零，在 y 轴上的点的 z 坐标和 x 坐标都等于零，在 z 轴上的点的 x 坐标和 y 坐标都等于零. 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$.

坐标 \ 符号 \ 卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 八个卦限的顺序按在其中的坐标的符号规定如上表（图1—3）.

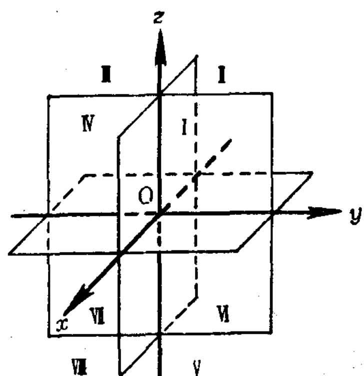


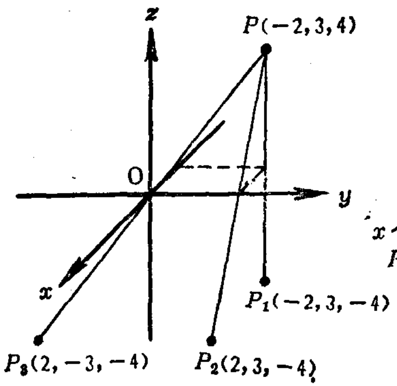
图1—3

设点 $P(x, y, z)$ 与坐标原点 O 不重合，则它关于 xOy 平面的对称点为 $(x, y, -z)$，关于 x 轴的对称点为 $(x, -y, -z)$，关于原点的对称点

为 $(-x,\ -y,\ -z)$. 类似可以写出关于其他坐标平面和坐标轴的对称点.

例 在直角坐标系中画出点 $P(-2,3,4)$，写出点 P 关于 xOy 平面，关于 y 轴和关于原点的对称点的坐标，并画出这些点.

解 如图 1—4，P_1、P_2、P_3 分别是点 P 关于 xOy 平面、关于 y 轴和关于原点的对称点①.
P_1 的坐标为 $(-2,\ 3,\ -4)$，P_2 的坐标为 $(2,\ 3,\ -4)$，P_3 的坐标为 $(2,\ -3,\ -4)$.



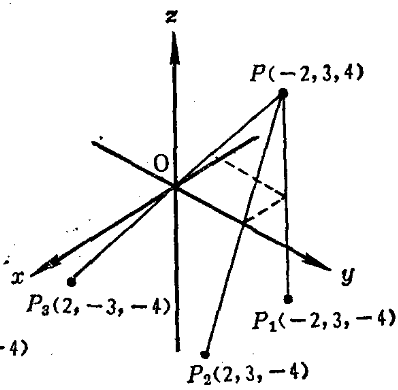


图 1—4

容易知道，点 P_1、P_2 是关于 yOz 平面的对称点，P_2、P_3

---

①在纸上（即在平面上）画空间直角坐标系，常把坐标轴的位置画成使 $\angle yoz=90°$，$\angle xoy=\angle zox=135°$，$x$ 轴、y 轴和 z 轴上的长度单位之比为 $\frac{1}{2}:1:1$，这种画法称为斜二轴测投影，如图 1—4 (1)．另一种画法是使 $\angle xoy=\angle yoz=\angle zox=120°$，三坐标轴上的长度单位相等，这种画法称为正轴测投影，如图 1—4 (2).

是关于 zOx 平面的对称点，P_1、P_3 是关于 z 轴的对称点.

§ 2　两个基本公式

1. 两点间的距离公式

在空间直角坐标系下，已知两点 P_1 和 P_2 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2). 我们来求这两点间的距离.

过 P_1 作三个平面分别平行于三个坐标平面，且和 x 轴、y 轴、z 轴依次交于点 $A_1(x_1, 0, 0)$、$B_1(0, y_1, 0)$、$C_1(0, 0, z_1)$；再过 P_2 作三个平面分别平行于三个坐标平面，且和坐标轴依次交于点 $A_2(x_2, 0, 0)$、$B_2(0, y_2, 0)$、$C_2(0, 0, z_2)$（图 1—5）.

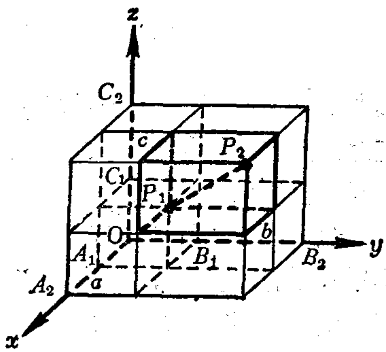


图 1—5

这六个平面构成一个长方体，它的边长分别是

$$a = |x_2 - x_1|, \quad b = |y_2 - y_1|,$$
$$c = |z_2 - z_1|. \tag{1}$$

利用勾股定理可得 P_1 和 P_2 间的距离 d 满足关系式

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{2}$$

以(1)代入(2)，再开平方，就得到

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{3}$$

例 1　求点 $P(4, -5, 1)$ 到 x 轴的距离.

解　过 P 作 x 轴的垂线，垂足 Q 的坐标为 $(4, 0, 0)$. $|PQ|$ 就是点 P 到 x 轴的距离 d，故得

$$d=|PQ|=\sqrt{(4-4)^2+(0+5)^2+(0-1)^2}$$
$$=\sqrt{26}.$$

2．线段的定比分点公式

在空间已给两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$．现在要在连线 P_1P_2 上求一点 $P(x, y, z)$，它分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 为两部分，使它们的比等于 λ，即使

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

其中 P_1P 和 PP_2 是有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的代数长．当 λ 为正值时，点 P 是线段 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点；当 λ 为负值时，点 P 是外分点，但显然 $\lambda\neq-1$.

过 P_1、P_2 和 P 分别作平面平行于 yOz 平面，交 x 轴于点 A_1、A_2 和 A（图1—6）．由于两直线被平行平面截得的线段成比例，故得

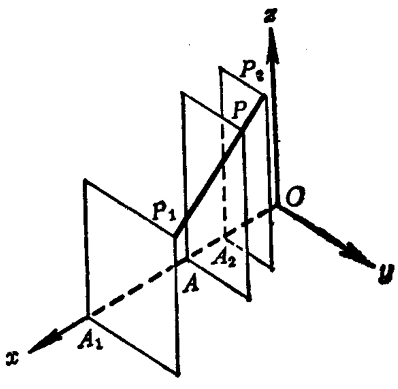


图1—6

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{A_1A}{AA_2},$$

而 $\quad A_1A=x-x_1,$

$\quad AA_2=x_2-x,$

所以 $\quad \dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$

由此得 $\quad x-x_1=\lambda(x_2-x),$

即 $\quad (1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2,$

因为比值 $\lambda\neq-1$，故得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同理可得
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\tag{4}$$
$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

当 $\lambda=1$ 时，分点 P 是线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点，它的坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},$$
$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.\tag{5}$$

例 2 已知两点 $P_1(2, 3, -5)$ 和 $P_2(1, -2, 8)$，求直线 P_1P_2 与坐标平面 yOz 的交点 P 的坐标.

解 点 P 在 yOz 平面上，故设它的坐标为 $(0, y, z)$，并设

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda,$$

则
$$0=\frac{2+\lambda}{1+\lambda},\quad y=\frac{3-2\lambda}{1+\lambda},\quad z=\frac{-5+8\lambda}{1+\lambda}.$$

由第一式得 $\lambda=-2$，代入第二、第三式，得 $y=-7, z=21$. 故得 P 点的坐标为 $(0, -7, 21)$.

例 3 1）在一线段的端点 $A_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $A_2(x_2, y_2, z_2)$ 上分别放置质量 m_1 和 m_2，求这个质量系的重心的坐标；

2）在三点 $A_1(x_1, y_1, z_1)$、$A_2(x_2, y_2, z_2)$ 和 $A_3(x_3, y_3, z_3)$ 上分别放置质量 m_1、m_2 和 m_3，求这个质量系的重心的坐标.

解 1）设这个质量系的重心为 $G(x, y, z)$，由物理学可知，点 G 在线段 A_1A_2 上，且分 A_1A_2 为两线段，它们的比等于 $m_2:m_1$，即

$$\frac{A_1G}{GA_2}=\frac{m_2}{m_1},$$

故 $$x=\frac{x_1+\dfrac{m_2}{m_1}x_2}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}.$$

同理， $$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2},\quad z=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}.$$

2）设在点 A_1 和 A_2 上放置质量 m_1 和 m_2 后所成的质量系的重心为 G_1，那末原质量系的重心 G，就是在 G_1 和 A_3 上放置质量 m_1+m_2 和 m_3 后所成质量系的重心，故 G 在线段 G_1A_3 上，且 $\dfrac{G_1G}{GA_3}=\dfrac{m_3}{m_1+m_2}$，因此 G 的坐标为

$$x=\frac{\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\dfrac{m_3}{m_1+m_3}}$$

$$=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

利用数学归纳法，可以证明，若在 n 个点 $A_i\ (x_i, y_i, z_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上分别放上质量 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，则所成质量系的重心的坐标为

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

§ 3 曲面和曲线的方程

1. 曲面和曲线的方程的概念

空间的曲面可以看作适合于某一条件的点的轨迹．例如一个球面是到定点的距离为定长的点的轨迹，一个线段的垂直平分平面是到这个线段的两个端点距离相等的点的轨迹．假设以 x、y、z 表示曲面上的任一点的坐标，并用方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{6}$$

表示曲面的点的坐标要满足的条件，如果这个方程和曲面之间有下面的关系：

1）曲面上所有点的坐标都适合这个方程；

2）坐标适合这个方程的所有点都在这个曲面上．

那末这样的方程叫做**曲面的方程**，而这个曲面叫做这个**方程的图形**．

空间的曲线可以看作两个曲面的交线．设这两个曲面的方程为 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$，如果它们的交线 l 和方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases} \tag{7}$$

有如下关系：

1）曲线 l 上所有点的坐标都适合方程组；

2）坐标适合这个方程组的所有点都在曲线 l 上．