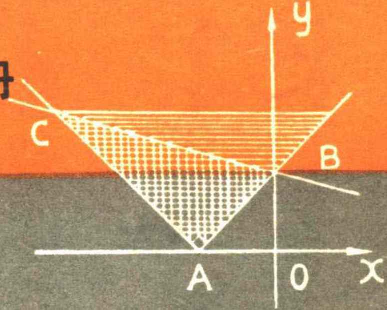
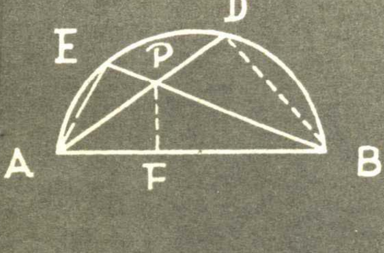
CHUDENG SHUXUE ZONGHE XUNLIAN

初等数学综合训练

下　册





湖　北　教　育　出　版　社

初等数学综合训练

下　册

熊大寅　陈昌祥　戚应璟　陈纪绵
梁法驯　肖若朴　李伯粤　樊　恺
合　编

湖北教育出版社

目　录

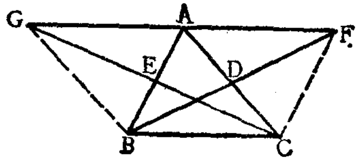
下　册

三、平面几何

§3.1 直 线 形

1. 在$\triangle ABC$中，延长二中线BD、CE到F、G，使$DF=BD$，$EG=CE$. 求证：G、A、F三点在一直线上.

证法一 连BG，CF.



(图 3—1.1)

$\because$ $AE=BE$，

$GE=CE$，

$\angle AEG=\angle BEC$，

$\therefore$ $\triangle AEG\cong\triangle BEC$.

$\therefore$ $\angle EAG=\angle EBC$.

即 $\angle BAG=\angle ABC$.

同理 $\angle CAF=\angle ACB$.

而 $\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=180°$，

$\therefore$ $\angle BAG+\angle BAC+\angle CAF=180°$.

故G、A、F三点在一直线上.

证法二 $\because$ $AE=BE$，$GE=CE$，

$\therefore$ $AGBC$是平行四边形.

$\therefore$ $AG\parallel BC$.

同理 $AF\parallel BC$.

但过A只能作一直线平行于BC，故G、A、F三点在一直线上.

〔附注〕 证明三点共线，一般的方法是：

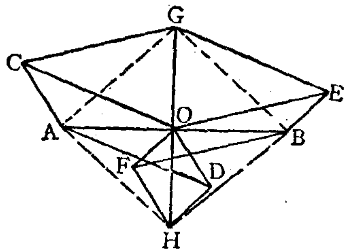
(1) 利用平角，对顶角和等角，如本题证法一；第 3 题证法一；

(2) 利用平行公理，如本题证法二；

(3) 利用某些点（如线段的中点）的唯一性，如下题证法一；

(4) 利用 Menelaus 定理(见第 4 题)。

2. 线段 AB 的中点是 O，以 AO 和 BO 为对角线作平行四边形 $ACOD$ 和 $BEOF$，又作平行四边形 $OCGE$ 和 $ODHF$，求证：G、O、H 在一直线上。



(图 3—1.2)

证法一 连 AG、HB、AH、GB.

$\because$ $CA \perp\!\!\!\!= OD \perp\!\!\!\!= FH$,

$CG \perp\!\!\!\!= OE \perp\!\!\!\!= FB$,

$\therefore$ $\angle ACG = \angle HFB$.

$\therefore$ $\triangle ACG \cong \triangle HFB$.

$\therefore$ $AG = HB$.

同理 $AH = GB$.

由此，$AHBG$ 是平行四边形，其对角线 GH 与 AB 将相交于 AB 的中点 O. 这就是说，G、O、H 在一直线上.

证法二 设 O 为坐标原点，并以相应的小写字母记其他各点所对应的复数. 则

$$a = -b,\ f = b - e,\ d = a - c = -b - c,$$

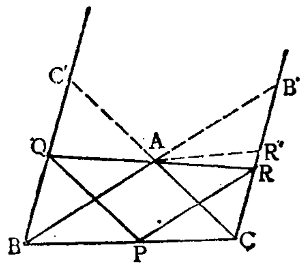
$$g = c + e,\ h = d + f = -c - e.$$

由此 $\dfrac{g}{h} = \dfrac{c+e}{-(c+e)} = -1.$

所以，G、O、H 在一直线上.

3. 自$\triangle ABC$的边BC上一点P作AC、AB的平行线，交过B、C的任意二平行线于Q、R两点. 求证：A、Q、R三点共线.

证法一 分别延长BA，CA，设交CR，BQ于B'，C'.



（图 3—1.3）

$\because \quad BC' \parallel CB'$,

$\therefore \quad \angle QC'A = \angle RCA$.

又 $\quad \dfrac{C'A}{CA} = \dfrac{C'B}{CB'}$.

且 $\quad \dfrac{C'Q}{C'B} = \dfrac{CP}{CB} = \dfrac{CR}{CB'}$,

即 $\quad \dfrac{C'Q}{CR} = \dfrac{C'B}{CB'}$.

$\therefore \quad \dfrac{C'A}{CA} = \dfrac{C'Q}{CR}$.

$\therefore \quad \triangle AC'Q \backsim \triangle ACR$.

$\therefore \quad \angle QAC' = \angle RAC$.

于是A、Q、R三点共线.

证法二 仍如上图，延长QA设交CR于R'. 可得

$$\frac{B'R'}{R'C} = \frac{BQ}{QC'}.$$

而 $\quad \dfrac{B'R}{RC} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BQ}{QC'}$,

$\therefore \quad \dfrac{B'R'}{R'C} = \dfrac{B'R}{RC}$.

$$\frac{B'R'}{B'R' + R'C} = \frac{B'R}{B'R + RC}$$

即 $\quad \dfrac{B'R'}{B'C} = \dfrac{B'R}{B'C}$.

$\therefore \quad B'R' = B'R$，$R'$与$R$重合.

于是 A、Q、R 三点共线.

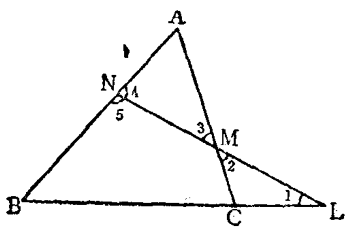
4. 设 L、M、N 各是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，则 L、M、N 三点共线的充分必要条件是

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

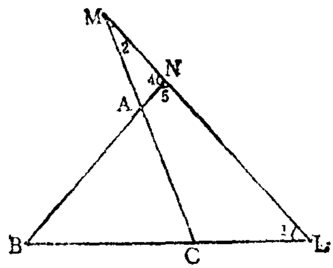
(Menelaus 定理)

证 ①先证明题设关系式是 L、M、N 三点共线的必要条件.

设 L、M、N 三点共线，如图 3—1.4(或图3—1.5).



(图 3—1.4)



(图 3—1.5)

$$\frac{CM}{LC}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2},\quad \frac{AN}{MA}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4},\quad \frac{BL}{NB}=\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 1}.$$

注意到 $\sin\angle 2=\sin\angle 3$，$\sin\angle 4=\sin\angle 5$，即得

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 1}=1.$$

(如果从顶点 A、B、C 作直线 LMN 的垂线，根据相似三角形的对应边成比例，也容易证得上面的关系式.)

②再证明题设关系式是 L、M、N 三点共线的充分条件.

设 $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$

连 LM，设交 AB 于 N'. 则由①得

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN'}{N'B}=1.$$

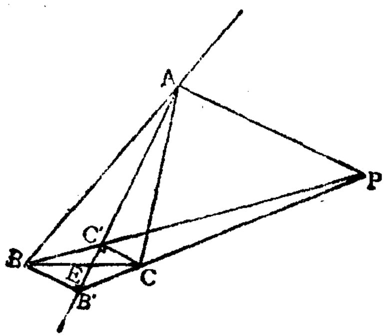
将两式作比较，得 $\frac{AN}{NB}=\frac{AN'}{N'B}$.

于是 $\frac{AN}{AN+NB}=\frac{AN'}{AN'+N'B}$，即 $\frac{AN}{AB}=\frac{AN'}{AB}$.

$\therefore\quad AN=AN'$.

故 N 和 N' 重合，从而 L、M、N 三点共线.

5. 在$\triangle ABC$ 中，设 B、C 在$\angle A$ 的平分线 AE 上的射影为 B'、C'. 求证：BC'、$B'C$ 及 $\angle A$ 的外角平分线交于一点.



(图 3—1.6)

证 设 BC' 与 $B'C$ 交于 P，连 AP.

$\because\quad \angle BAB'=\angle CAC'$,

$\therefore\quad rt\triangle ABB'\backsim rt\triangle ACC'$.

$\therefore\quad \frac{AB'}{AC'}=\frac{BB'}{CC'}$.

又 $BB'\parallel CC'$,

$\therefore \quad \dfrac{BB'}{CC'}=\dfrac{BP}{C'P}.$

$\therefore \quad \dfrac{AB'}{AC'}=\dfrac{BP}{C'P},$

于是 $\dfrac{AB'-AC'}{AC'}=\dfrac{BP-C'P}{C'P}$，即 $\dfrac{B'C'}{AC'}=\dfrac{BC'}{C'P}.$

$\therefore$ $AP\parallel BB'$，从而 $AP\perp AE$.

这就是说，AP 是$\angle A$ 的外角平分线，从而结论得证.

【附注】 证明三线共点，一般的方法是证其中两线的交点在第三线上；或过其中两线的交点另作一线，证其合于第三线.另外，证明三线共点也常利用 Ceva 定理.

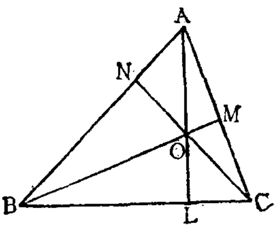
6. 设 L、M、N 各是$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，则 AL、BM、CN 三直线共点或互相平行的充分必要条件是

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

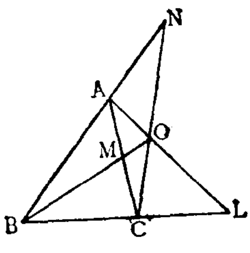
(Ceva 定理)

证 ①先证明题设关系式是 AL、BM、CN 三直线共点或互相平行的必要条件.

设 AL、BM、CN 相交于一点 O，如图：



(图 3—1.7)



(图 3—1.8)

对$\triangle ABL$及截线CON应用 Menelaus 定理，得

$$\frac{BC}{CL}\cdot\frac{LO}{OA}\cdot\frac{AN}{NB}=1;$$

再对$\triangle ALC$及截线BOM应用 Menelaus 定理，得

$$\frac{LB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AO}{OL}=1.$$

两式相乘，即得

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

若$AL\parallel BM\parallel CN$，同样可推得上面的关系式.

②再证明题设关系式是AL、BM、CN三直线共点或互相平行的充分条件.

设 $$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

若AL、BM、CN中有两条相交，不妨设是AL和BM相交于O. 连CO，设交AB于N'，则由①得

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN'}{N'B}=1.$$

将两式作比较，得

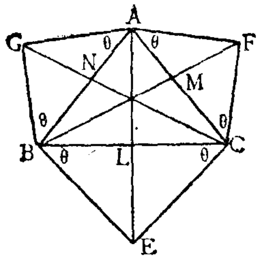
$$\frac{AN}{NB}=\frac{AN'}{N'B}.$$

由此即不难推得N和N'重合，从而AL、BM、CN三直线共点.

若AL、BM、CN中有两条平行，不妨设是$AL\parallel BM$，同样容易推得$AL\parallel BM\parallel CN$.

7. 于$\triangle ABC$的各边上向形外作相似等腰三角形BCE、CAF、ABG. 试证AE、BF、CG相交于一点.

证　设三个相似等腰三角形的底角为θ，AE、BF、CG各交BC、AC、AB于L、M、N。



（图 3—1.9）

$$\because \quad \frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle ACL}}=\frac{BL}{CL},$$

$$\frac{S_{\triangle BEL}}{S_{\triangle CEL}}=\frac{BL}{CL},$$

$$\therefore \quad \frac{S_{\triangle ABL}}{S_{\triangle ACL}}=\frac{S_{\triangle BEL}}{S_{\triangle CEL}}=\frac{BL}{CL}.$$

$$\frac{S_{\triangle ABL}+S_{\triangle BEL}}{S_{\triangle ACL}+S_{\triangle CEL}}=\frac{BL}{CL}.$$

即
$$\frac{BL}{LC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{\frac{1}{2}BE\cdot AB\sin(\theta+B)}{\frac{1}{2}CE\cdot AC\sin(\theta+C)}$$

$$=\frac{AB\sin(\theta+B)}{AC\sin(\theta+C)}.$$

同理
$$\frac{CM}{MA}=\frac{BC\sin(\theta+C)}{AB\sin(\theta+A)},\quad \frac{AN}{NB}=\frac{AC\sin(\theta+A)}{BC\sin(\theta+B)}.$$

故
$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1.$$

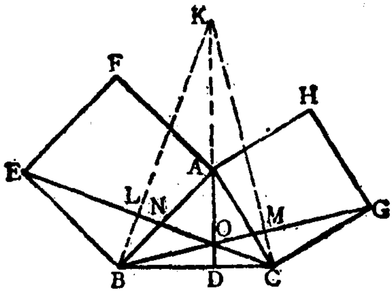
由 Ceva 定理，可知AE、BF、CG相交于一点。

8．在$\triangle ABC$的边AB、AC上向外各作正方形$ABEF$、$ACGH$，又作$AD\perp BC$于D，求证：AD、BG、CE三直线共点。

证　延长DA至K，使$AK=BC$。连结BK、CK，分别交CE、BG于L、M。

$\because \quad \angle KAF+\angle DAB=\angle ABD+\angle DAB=90^\circ$，

$\therefore \quad \angle KAF=\angle ABD$。



（图 3—1.10）

$\because$ $\angle FAB=\angle EBA=90°$,

$\therefore$ $\angle KAF+\angle FAB=\angle ABD+\angle EBA$.

即 $\angle KAB=\angle CBE$.

又 $AK=BC$，$AB=BE$,

$\therefore$ $\triangle KAB\cong\triangle CBE$.

$\therefore$ $\angle ABK=\angle CEB$.

即 $\angle NBL=\angle LEB$. （N 是 AB 与 CE 的交点）

但 $\angle LEB+\angle LNB=90°$,

$\therefore$ $\angle NBL+\angle LNB=90°$，$\angle NLB=90°$.

由此 $CL\perp KB$.

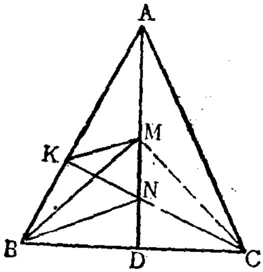
同理 $BM\perp KC$.

而$\triangle KBC$ 的三高 KD、BM、CN 交于一点 O，故得 AD、BG、CE 三直线交于一点 O.

〔**附注**〕 本题的证明方法是变更原题，使题中要证的共点三线在另一图形中成为已知的共点线.

9．在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，$\angle B$ 之三等分线与 BC 边上的高 AD 交于 M、N，又 CN 之延长线交 AB 于 K，

求证：$KM \parallel BN$.



（图 3—1.11）

证 设等腰三角形 ABC 的底角为 3α，则

$\angle ABM=\angle MBN=\angle NBD=\alpha$.

连结 MC，由对称性不难得到

$\angle ACM=\angle ABM$,

$\angle MCN=\angle MBN$,

$\angle NCD=\angle NBD$.

由此 $\angle ACM=\angle MCN$

$=\angle NCD=\alpha$.

因 CM 是 $\angle ACK$ 的平分线，AN 是 $\angle CAK$ 的平分线，故 M 是$\triangle ACK$ 的内心，于是 KM 是 $\angle AKC$ 的平分线.

而 $\angle AKC=\angle KBC+\angle KCB=3\alpha+\alpha=4\alpha$,

$\therefore\ \angle AKM=\dfrac{1}{2}\angle AKC=2\alpha$.

又 $\angle KBN=\angle KBM+\angle MBN=2\alpha$,

$\therefore\ \angle AKM=\angle KBN$.

故 $KM \parallel BN$.

〔附注〕 证明两线平行，一般的方法是：

① 利用角（同位角、内错角或同旁内角）的关系，如本题；

② 利用平行四边形，如下题证法一；

③ 利用三角形（梯形）的中位线定理，或一直线分三角形两边成比例线段定理，如第 12 题证法一、证法二.

10. 如图，AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三中线，又 $FG \parallel BE$，$EG \parallel AB$，连 GC，求证 $AD \parallel GC$.

证法一 连 AG、FE.

$\because$ $FBEG$ 是平行四边形，

$\therefore$ $GE \perp\!\!\!\!= FB \perp\!\!\!\!= AF$.

$\therefore$ $AFEG$ 是平行四边形.

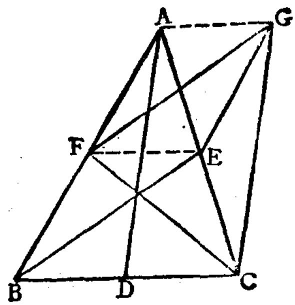
$\therefore$ $AG \perp\!\!\!\!= FE$.

又 $FE \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BC \perp\!\!\!\!= DC$，

$\therefore$ $AG \perp\!\!\!\!= DC$.

$\therefore$ $ADCG$ 是平行四边形.

$\therefore$ $AD \parallel GC$.



(图 3—1.12)

证法二 设 B 为坐标原点，并以相应的小写字母记其他各点所对应的复数. 则

$$f=\frac{a}{2},\quad d=\frac{c}{2},\quad e=\frac{a+c}{2},$$

$$g=f+e=\frac{2a+c}{2}.$$

于是 $\overrightarrow{AD}$ 对应于复数

$$d-a=\frac{c-2a}{2};$$

$\overrightarrow{GC}$ 对应于复数

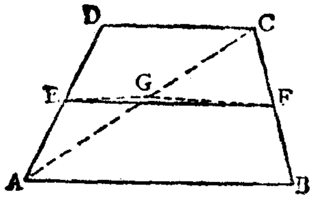
$$c-g=\frac{c-2a}{2}.$$

故得 $AD \parallel GC$.

〔**附注**〕 在复平面上，两直线平行或重合的充要条件是，这两直线上的向量所表示的两个复数的商是一个实数。据此也可以应用复数来解决证明两线平行（如本题）以及三点共线（如第 2 题）的问题.

11. 在四边形 $ABCD$ 中，E、F 各是 AD、BC 两边的中点，且 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$，求证：$AB \parallel CD$.

证法一 假设 AB 不平行于 CD. 连结 AC，取它的中



（图 3—1.13）

点 G，再连结 GE、GF. 则

$$GF \parallel AB,\ GE \parallel CD.$$

由此 EGF 不能是直线，于是

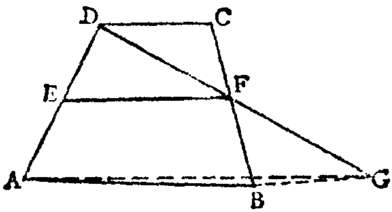
$$EF < GF + GE$$

$$= \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$$

$$= \frac{1}{2}(AB + CD).$$

这与题设矛盾.

故有　$AB \parallel CD$.



（图 3—1.14）

证法二　连 DF 并延长至 G，使 $FG = DF$. 连结 AG，则 $AG = 2EF$.

再连结 BG，因 BC、DG 互相平分，故 $BGCD$ 为平行四边形. 于是 $BG \perp\!\!\!\!= CD$. 由已知

$$AB + CD = 2EF,$$

$$\therefore\quad AB + BG = 2EF.$$

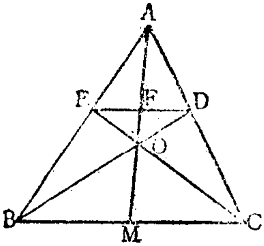
$$\therefore\quad AG = AB + BG.$$

由此，AB、BG 成一直线. 而 $BG \parallel CD$，故有

$$AB \parallel CD.$$

12. O 为 $\triangle ABC$ 中线 AM 上任意一点. BO, CO 之延长线分别交 AC, AB 于 D, E, 求证:

$$ED \parallel BC.$$



(图 3—1.15)

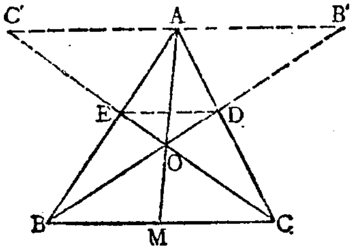
证法一 因 AM, BD, CE 共点, 根据 Ceva 定理有

$$\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CD}{AD}\cdot\frac{AE}{BE}=1.$$

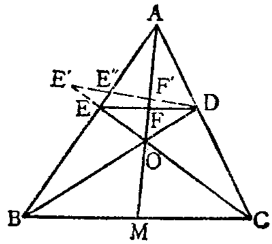
已知 $BM=CM$,

则 $\dfrac{CD}{AD}\cdot\dfrac{AE}{BE}=1.$ 因此 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{AE}{BE}$.

$\therefore$ $ED \parallel BC$.



(图 3—1.16)



(图 3—1.17)

证法二 如图 3—1.16, 过 A 作 $B'C' \parallel BC$, 分别交 BD、CE 于 B'、C'. 则

$$\frac{BM}{B'A}=\frac{CM}{C'A}.$$

但 $BM=CM$, 故 $B'A=C'A$.

又 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{C'A}{BC}$, $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{B'A}{BC}$,

$\therefore$ $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AD}{DC}$.

因此　$ED\parallel BC$.

证法三　如图3—1.17，过D作$DE'\parallel CB$，分别交CO、AB、AM于　E'、E''、F'. 则

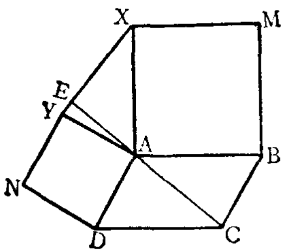
$$\frac{E'F'}{CM}=\frac{DF'}{BM},\quad \frac{E''F'}{BM}=\frac{DF'}{CM}.$$

但 $BM=CM$，故 $E'F'=E''F'$.

由此，E'、E''将重合于CO和AB的交点E，因而$E'D$和ED也将重合.

$\therefore$　$ED\parallel BC$.

13. 在平行四边形$ABCD$的边AB，AD上向形外作两个正方形$ABMX$，　$ADNY$. 求证：对角线AC与两正方形的顶点X与Y的联线垂直.



（图 3—1.18）

证法一　设CA的延长线交XY于E.

$\because$　$\angle XAY+\angle BAD$

$=\angle ABC+\angle BAD=180°$,

$\therefore$　$\angle XAY=\angle ABC$.

又　$AX=AB$,

$AY=AD=BC$,

$\therefore$　$\triangle AXY\cong\triangle BAC$.

$\therefore$　$\angle YXA=\angle BAC$.

但　$\angle BAC+\angle XAE=90°$,

$\therefore$　$\angle YXA+\angle XAE=90°$.

由此，得　$\angle XEA=90°$，即$AC\perp XY$.

证法二　以A为原点建立坐标系，设B、X、Y分别对应于复数1，i，z，则D对应于复数iz，C对应于复数$iz+1$.

注意到$\overrightarrow{AC}$对应于复数$iz+1$，$\overrightarrow{XY}$对应于复数$z-i$，而