大学文科数学简明教程

（上 册）

姚孟臣 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等学校文科数学基础课教材

大学文科数学简明教程

（上　册）

姚孟臣　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学简明教程·上册/姚孟臣编著.—北京:北京大学出版社,2004.9

ISBN 7-301-07755-6

Ⅰ.大…　Ⅱ.姚…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第083738号

书　　　名:大学文科数学简明教程(上册)

著作责任者:姚孟臣　编著

责 任 编 辑:刘　勇

标 准 书 号:ISBN 7-301-07755-6/O·0607

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661

印　刷　者:北京大学印刷厂

经　销　者:新华书店

890 mm×1240 mm　A5　8.875 印张　260 千字

2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

印　　　数:0001—4000 册

定　　　价:15.00 元

前　言

20世纪70年代以来，我们为北京大学等院校文科各系各专业讲授“高等数学”课程期间，在课程内容体系上进行了多次改革，先后编写了《大学文科基础数学》、《文科高等数学教程》和《大学文科高等数学》等多部教材，深受广大师生的好评。

文科高等数学(包括微积分、线性代数和概率统计)是文科类各专业的一门基础课。针对目前全国各高校的不同专业方向对基础数学要求有一定差异，在总学时不多的情况下，编写一套能够科学地阐述高等数学的基本内容、全面系统地介绍有关基本原理和基本方法的简明易懂的教材尤为重要。

根据高等教育面向21世纪教学内容和课程改革总目标的要求，结合作者三十年来讲授文科高等数学课程的实践，我们又编写了这套教材《大学文科数学简明教程》，其中包括主教材《大学文科数学简明教程(上册)》、《大学文科数学简明教程(下册)》以及与之配套的辅导教材《大学文科数学解题指南》共三册。本套教材包括三部分内容：第一部分“微积分”，第二部分“线性代数”，第三部分“概率统计”。第一部分“微积分”编写在上册，上册共分五章，内容包括函数与极限、一元函数微分学、中值定理和导数的应用、一元函数积分学、多元函数微积分。在附录中还分别介绍了无穷级数与常微分方程的有关知识。第二部分“线性代数”和第三部分“概率统计”编写在下册，下册共分为五章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、初等概率论与数理统计基础等。讲授以上全部内容可以安排在两个学期，按每个学期17周，每周3个学时计算，

总共需要102个学时。本套教材按章配备了适量的习题，书末附有答案与提示，供教师和学生参考。

本套教材可作为一般院校文科类各专业的数学基础课教材，又可作为自学考试高等数学(一)“微积分”课程的主教材使用。对于“微积分”课程要求较低的理工科各专业也可选用本教材。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2004年6月8日于

北京大学中关园

目　　录

第一部分　微　积　分

第一章　函数与极限

高等数学与初等数学的区别在于研究的对象和研究方法的不同. 在高等数学中研究的对象主要是变量,所使用的方法主要是极限方法. 本章将在初等数学的基础上,进一步讨论变量之间的相互依存关系和变量在其变化过程中的变化趋势,从而引出高等数学中的两个重要的基本概念——函数与极限.

§1　函　　数

高等数学主要是在实数范围内讨论问题,因此作为预备知识在这里我们有必要简单地回顾一下实数的一些属性.

1.1　实数、区间和邻域

人们对数的认识是逐步发展的,首先是自然数 1,2,3,⋯. 由自然数构成的集合叫做自然数集,记为 $\boldsymbol{N}$,在 $\boldsymbol{N}$ 中我们可以定义加法和乘法的运算. 其后发展到有理数,它包括一切整数(整数的集合用 $\boldsymbol{Z}$ 表示)与分数,每一个有理数都可以表示成$\dfrac{p}{q}$(其中 $p,q\in \boldsymbol{Z}$ 且 $q\neq 0$). 我们把有理数构成的集合叫做有理数集,记为 $\boldsymbol{Q}$,在 $\boldsymbol{Q}$ 中我们可以定义四则运算. 下面我们先来介绍有理数的两个性质.

在数轴上,每一个有理数都可以找到一个点表示它. 例如,图 1-1 中的点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 等就可以分别代表有理数 -4, $-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},3,5$ 等. 我们把代表有理数 x 的点叫做有理点 x. 由图可

见，有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 除了可以在其中定义四则运算外，还具有**有序性**（即在数轴上有理点是从左向右按大小次序排列的）和**稠密性**（即在任意两个有理点之间有无穷多个有理点）.

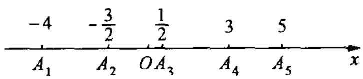

图　1-1

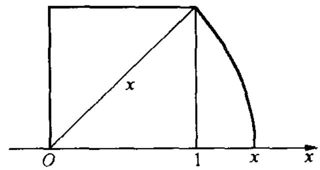

图　1-2

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但是它并没有充满整个数轴. 例如边长为 1 的正方形，其对角线长为 x（见图 1-2），由勾股定理可知 $x^2=2$. 设在数轴上的点 x 代表的数为$\sqrt{2}$，容易证明它不能表示成$\dfrac{p}{q}$（$p,q\in\boldsymbol{Z},q\neq0$）的形式，因此它不是有理数. 这说明在数轴上除了有理点以外还有许多空隙. 这些空隙处的点我们称之为**无理点**，无理点代表的数称为**无理数**. 无理数是无限不循环的小数，如$\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，π 等，由它们所构成的集合叫做无理数集，记为 $\boldsymbol{I}$. 我们把有理数与无理数统称为**实数**，全体实数构成的集合叫做实数集. 记为 $\boldsymbol{R}$. 与有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 一样，实数集 $\boldsymbol{R}$ 也具有在其中可以定义四则运算，有序的以及处处稠密的等性质，而且还具有一个与 $\boldsymbol{Q}$ 不同的特性，这就是实数的连续性（即实数点充满了整个数轴）.

由于任给一个实数，数轴上就有惟一的点与它对应；反之，数轴上的任意一个点也对应着惟一的实数，可见实数集合等价于数轴上的点集. 因此在以后的讨论中，我们可以把点与实数不加区分.

在 $\boldsymbol{R}$ 的子集中，我们今后经常遇到的是各种各样的区间. 所谓**区间**就是介于某两点之间的一切点所构成的集合，这两个点称为区间的**端点**. 如果两个端点都是定数，称此区间为有限的，否则称为无限的. 常见的区间有：设 $a\in\boldsymbol{R},b\in\boldsymbol{R}$ 且 $a<b$，我们把集合 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)；把集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$；把集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 称为**半开半闭区间**，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$. 以上各种有限区间在数轴上都可以用一

条线段来表示它们. 对于无限区间,例如$\{x|x>a\}$,记作$(a,+\infty)$;$\{x|x<a\}$,记作$(-\infty,a)$;$\{a|a\in\boldsymbol{R}\}$,记作$(-\infty,+\infty)$. 类似地,还有$[a,+\infty)$和$(-\infty,a]$(注意,这里的$+\infty$,$-\infty$以及∞只是一种符号,既不能把它们视为实数,也不能对它们进行运算).

下面我们介绍邻域的概念.

设$a\in\boldsymbol{R}$,$h\in\boldsymbol{R}$且$h>0$. 称集合

$$\{x\,|\,|x-a|<h\}$$

为a的一个**邻域**,记作$U_h(a)$,其中h为邻域半径;称集合

$$\{x\,|\,0<|x-a|<h\}$$

为a的一个空心邻域,记作$U_h(\bar{a})$. 当不必指明邻域半径时,我们用$U(a)$,$U(\bar{a})$表示a的邻域和a的空心邻域. 称集合

$$\{x\,|\,a\leqslant x<a+h\}\quad 和\quad \{x\,|\,a-h<x\leqslant a\}$$

为a的**右邻域**和**左邻域**,记作$U_h^+(a)$和$U_h^-(a)$. 若上述集合除去a点,就称为a的**空心右邻域**和**空心左邻域**,记作$U_h^+(\bar{a})$和$U_h^-(\bar{a})$. 不必指明邻域半径时,记号中可省略h.

1.2 函数的概念

1. 函数的定义

历史上,"函数"一词是由著名的德国数学家莱布尼兹(Leibniz)首先引入数学的. 他是针对某种类型的数学公式来使用这一术语的,尽管当时他已经考虑到变量x以及和x同时变化的变量y之间的依赖关系,但还是没有能够给出一个明确的函数定义. 其后经欧拉(Euler)等人不断修正、扩充才逐步形成一个较为完整的函数概念.

例 1 在真空中,物体在重力的作用下,从高度为h米处自由下落,下落物体的路程s与下落时间t的对应关系可以由下面公式:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$$

确定,其中g为重力加速度,它是一个常数.

例 2 温度自动记录仪把某地一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1-3 所示的曲线. 曲线上某一点$P_0(t_0,\theta_0)$表示时刻t_0的气温是θ_0. 观察这条曲线,可以知道在这一天内,时间t从 0 点到 24 点

气温 θ 的变化情形. 时间 t 和气温 θ 都是变量,这两个变量之间的数量关系是由一条曲线确定的.

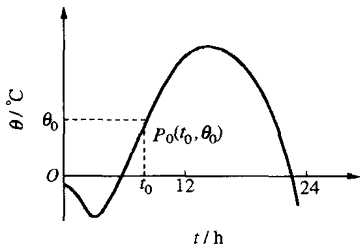

图 1-3

例 3 目前银行储蓄 1 年期整存整取的年利率为 2.25%,存款金额与所得利息列表如下:

存款金额 k(元)	100	500	1000	2000	5000	10000
一年利息 r(元)	2.25	11.25	22.5	45	112.5	225

可见,存款金额 k 和所得利息 r 都是变量,并且 r 随 k 取不同的值而取不同的值,而 r 与 k 之间的数量关系由上表所确定.

类似的例子是很多的,虽然它们的具体的背景不同,而且具有不同的表示形式,但是在数学上却有一个共同点:都是两个变量,并且当其中一个变量在某一范围内取定后,按照一定的规则(如公式、图像或表格),另一个变量便有惟一的值与之对应,变量之间的这种对应关系就是函数关系.

从本质上讲,函数是从一个集合到另一个集合的映射. 即给定两个集合 A 和 B,若对于 A 中的每个元素 a,按照某一对应关系 f,在 B 中都有惟一确定的一个元素 b 与它对应,则称 f 为 A 上的一个函数,记作

$$f: A \to B.$$

集合 A 称为函数的定义域,与 A 中元素对应的 B 中元素 b 构成的集合称为函数的值域.

在函数定义中对定义域 A 和集合 B 中的元素的性质没有加以限制,但在微积分中我们感兴趣的是一些定义域和值域均为实数集的函数,这类函数称为实变数的实值函数,简称为实函数. 下面给出

它的定义：

定义 1.1 设 X 是一个给定的非空数集，f 是一个确定的对应关系.如果对于 X 中的每一个元素 x，通过 f 都有 $\boldsymbol{R}$ 内的惟一确定的一个元素 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 X 到 $\boldsymbol{R}$ 的**函数关系**，简称为**函数**，记为

$$f: X \to \boldsymbol{R} \quad 或 \quad f(x) = y.$$

我们把按照函数 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in \boldsymbol{R}$ 叫做 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y=f(x)$. 并把 X 叫做函数 f 的**定义域**，一般用 D_f 表示，而 f 的全体函数值的集合

$$\{f(x) \mid x \in D_f\}$$

叫做函数 f 的**值域**，通常用 Y 来表示，即

$$Y = \{f(x) \mid x \in D_f\}.$$

由函数的定义可知，决定一个函数有三个因素：定义域 D_f，对应关系 f 和值域 Y. 注意到每一个函数值都可由一个 $x \in D_f$ 通过 f 而惟一确定，于是给定 D_f 和 f，Y 就相应地被确定了；从而 D_f 和 f 就是决定一个函数的**两个要素**. 因此，今后我们把函数用

$$y = f(x), \quad x \in D_f$$

来表示. 并说 y 是 x 的函数，其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. 由于在我们讨论的范围内，函数 f 和函数值 $f(x)$（即 y）没有区分的必要，因此通常把 y 叫做 x 的函数.

在例 1 中对应关系 f 为：

$$f(\quad) = \frac{1}{2}g(\quad)^2,$$

即先对自变量作平方运算，然后再乘以 $\frac{1}{2}g$；其定义域为 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

例 1 中的函数我们也可以用

$$y = \frac{1}{2}gx^2, \quad x \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$$

表示.

通过上面的讨论可以看出，一个函数主要是由函数关系和其定义域 X 所确定的，而与其自变量和因变量所选用的符号没有关系.

例 4 圆的面积 S 是半径 r 的函数. 用

$$S = \pi r^2, \quad r \in [0, +\infty)$$

来表示，其中

$$D_f = \{r \mid 0 \leqslant r < +\infty\}$$

是 f 的定义域. 如果不考虑这个问题的具体内容，则函数 $S=\pi r^2$ 的定义域为

$$D_f = \{r \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

一般地，当 $f(x)$是用 x 的表达式给出时，如果不特别声明，那么函数的定义域就是使 $f(x)$有意义的全体 x 的集合，通常称它为**自然定义域**.

例如函数 $y=\frac{1}{2}gx^2$ 的自然定义域为$(-\infty,+\infty)$.

除了用字母"f"表示函数以外，当然也可以用其他的字母，例如，用"F"，"φ"等等来表示函数，甚至可以用 $y=y(x)$来表示一个函数. 但在同一个问题中不同的函数一定要用不同的符号来表示.

在定义中，我们用"惟一确定"来表明所讨论的函数都是单值的. 所谓**单值函数**就是对于 X 中的每一个 x 值，都有一个而且只有一个 y 与之对应的函数. 对于 X 中的某个 x 值有多于一个 y 与之对应的函数，叫做**多值函数**. 本书我们只讨论单值函数.

由于定义域和对应规则是决定一个函数的两个要素，因此，在高等数学中两个函数相同是指它们的定义域和对应规则分别相同. 例如，函数

$$f(x) = \ln x^2 \quad 与 \quad g(x) = 2\ln|x|$$

是相同的函数. 因为这两个函数的定义域都是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，根据对数的性质知

$$\ln x^2 = 2\ln|x|,$$

即这两个函数的对应法则是一致的. 而函数

$$f(x) = \ln x^2 \quad 与 \quad g(x) = 2\ln x$$

是不同的函数，前者的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而后者的定义域为$(0,+\infty)$.

2. 函数的表示方法

表示函数的方法主要有三种：公式法、图形法和列表法.

(1) 公式法

变量 x 与 y 之间的函数关系是由数学表达式给出的，称为**公式法或解析法**. 如前述例 1 就是用公式法表示下落物体的路程 s 与时间 t 之间的函数关系. 用该法表示函数，便于理论分析和计算. 在下面的讨论中，我们一般都使用公式法来表示函数.

(2) 图形法

用图形表示变量 x 与 y 之间的函数关系，称为**图形法**. 在平面直角坐标系中，对于函数 $y=f(x)$，以自变量 x 的取值为横坐标，与其对应的 y 值为纵坐标，这样一些点 (x,y) 的轨迹形成一条曲线，便是该函数的几何图形. 如前述例 2 就是用图形法表示一天 24 小时内，时间 t 与气温 θ 之间的函数关系. 用图形法表示函数关系，形象直观，易看到函数的变化趋势.

(3) 列表法

若变量 x 与 y 之间有函数关系，将一系列自变量 x 的值与对应的函数值 y 列成表，称为**列表法**. 如前述例 3 就是用列表法表示一年所得利息 r 与存款金额 k 之间的函数关系. 在初等数学中，我们所用的对数表、三角函数表等均是用列表法表示对数函数和三角函数. 列表法的优点是使用方便，在实际工作中经常使用. 它的局限性是不能完全反映两个变量之间的函数关系.

下面我们给出三个用解析法表示的常用函数.

例 5 绝对值函数

$$y=|x| \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

这个函数在 $x \geqslant 0$ 时分析表达式为 $y=x$，在 $x<0$ 时为 $y=-x$ (图 1-4). 这种由两个或两个以上的分析表达式表示的函数，称为分段定义函数，简称为**分段函数**. 需要注意的是，在一般情况下，对于同一个自变量，函数不能同时有两个不同的分析表达式.

例 6 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

这也是一个分段函数，其图形如图 1-5 所示. 例 5 的绝对值函数 $|x|$ 可由它和 x 表示：$|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$，可见 $\operatorname{sgn}x$ 起了 x 的符号作用，故称它为**符号函数**. 需要指出的是，有些函数如 $y=\sin x$，它的对应关系是通过函数符号 sin 表示的. 这里的 sgn 是符号函数的函数符号.

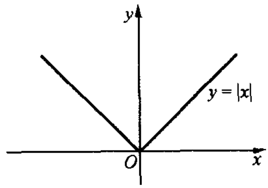

图　1-4

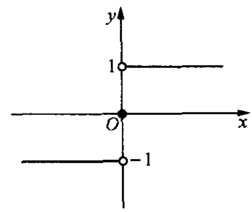

图　1-5

例 7　取整函数

$$y=[x]\overset{\text{def}}{=\!=\!=}n\ (x=n+r,n\in \mathbf{Z},0\leqslant r<1,x\in \boldsymbol{R}).$$

可见，记号[ ]表示不超过 x 的最大整数. 例如 $[2.1]=2$，$[0.3]=0$，$[-0.6]=[-1+0.4]=-1$，$[-3.5]=-4$，一般有

$$[x]\leqslant x<[x]+1\ (\text{见图 1-6}).$$

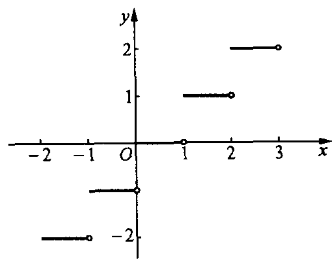

图　1-6

函数 $y=f(x),x\in X$ 一般可以用坐标平面上的图形给予几何说明. 所谓函数图形是指以 x 为横坐标，以 $f(x)$ 为纵坐标，由点 $(x,f(x))$ 所构成的一个平面点集 E，即

$$E=\{(x,f(x))\mid x\in X\}.$$

图 1-4，图 1-5 与图 1-6 分别给出了例 5，例 6 与例 7 中函数的图形，从函数图形上我们往往可以看出函数的某些特性. 应该指出的