教与学·教与学·教与学·教与学·教与学

高中代数

第二册

天津科学技术出版社

教 与 学

高中代数

第二册

丛书顾问 崔孟明

编　　者 徐望根 王念亲

邹优教

天津科学技术出版社

教与学
高中代数
第二册
丛书顾问　崔孟明
编　　者　徐望根　王念亲
　　　　　邹优教
*
天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道130号
天津市蓟县新欣印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本787×1092毫米　1/32　印张8.875　字数186 000
1988年5月第1版
1988年5月第1次印刷
印数：1－57 900
ISBN　7-5308-0333-6/G·63　定价：1.70元

前　言

教学过程是师生双边活动统一的过程。但应强调指出：教学活动的中心是学生，教和学都是为使学生尽多尽快地增长知识和才干，教学活动的主体也是学生，不论多么高明的教师用怎样巧妙的方法去教，学生都必须经过自己的实践和思维，才能最后牢固地掌握知识和增长能力。因此，教师的主导作用，首先是激发学生学习的积极性、主动性，同时要及时地满足学生对知识的需要，恰当地帮助学生克服学习中的困难。在整个教学活动中教师都要注意，不要伤害学生的主动性和积极性，不要破坏学生思维的连续和完整。要做到这一点，教师就必须充分了解学生的学习过程和心理活动。因此，当今国内外，都把对学习方法的研究作为教法研究的一项重要内容，以使教学活动更好地适应学生需要，进一步提高教学效率。

《教与学》丛书就是基于上述思想和多年实践经验编写而成的，旨在从教和学两方面启发学生主动探求，积极思维，尽多尽快地增长知识和自主学习的能力。

本丛书包括数学、物理、化学、生物、语文和英语六个学科，每科与课本对应分册，每册均按章或单元设有若干栏目。因这些栏目是根据学科内容需要设置的，因此，有共同的，也有专设的。

“知识结构”是用图表或简短文字说明相关范围内各项

知识间的推演、包含等内在联系，从中可找到学习的途径、知识的重点和把握知识的关键。可见它既是学习入门的向导，也是掌握知识的纲领。

“知识反馈”是一组检查课堂学习效果的练习题。它的编写，既考虑了覆盖面，也考虑了重点、难点和能力、方法的训练。因此，通过这套练习题，不仅能了解课堂效果，而且能使所学知识得到及时的巩固和进一步的理解，并可提高对知识的运用能力。

“课堂以外”是一在较大知识范围设立的比较活跃的栏目，可满足多方面的需要。其内容既与教材紧密衔接，又属课堂以外，有动脑的也有动手的。希望通过它能启迪智力、训练能力、开阔视野、疏通思路。

“教材提示”和“学法指导”，一方面是给学生以具体的知识，一方面是通过具体的学习过程教给学生一些富有成效的学习方法。

本丛书由景山学校校长、特级教师崔孟明同志任学术指导，由李勃梁、高柏林、宋志唐、邢永庆等同志分任各科主编，由京津部分有多年教学经验的教师编写。

本丛书的编写，虽几经讨论修改，但由于是经验性材料，难免有不足之处，欢迎读者批评指正。

目　　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

第一单元　反三角函数

【知识结构】

如果一个函数有反函数，那么研究这个函数的反函数是很有意义的，函数和反函数的双方，可以充分揭示变量之间的内在规律．如指数函数$y=a^x(a>0,\ a\neq1,\ x\in R)$的反函数是对数函数$y=\log_a x(a>0,\ a\neq1,\ x\in R^+)$，在对数函数的小天地里，对于变量之间的关系，另有一番新意．

为了研究三角函数的反函数，首先要考虑确定三角函数的映射是不是一一映射．如果是一一映射，那么三角函数就存在反函数；如果不是一一映射，那么三角函数就不存在反函数．

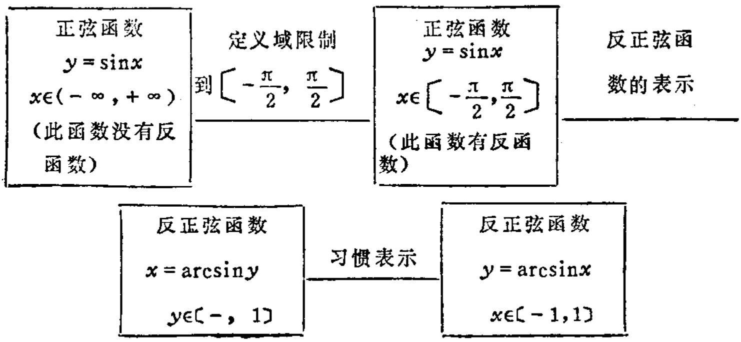
我们重点考虑正弦函数．从正弦函数的图象可以看出，确定正弦函数$y=\sin x(x\in(-\infty,\ +\infty))$的映射不是从定义域$(-\infty,\ +\infty)$到值域$[-1,\ 1]$上的一一映射，正弦函数$y=\sin x$在区间$(-\infty+\infty)$上没有反函数．

怎么办呢？让我们仔细观察正弦函数的图象，只要把定义域限制到合适的范围，也就是说，把正弦函数$y=\sin x$的的定义域从$(-\infty,\ +\infty)$限制到$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，那么确定函

数$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$的映射是从区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$到$[-1,\ 1]$上的一一映射，故这个映射有逆映射。因此，函数$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$有反函数。由此，有下面的定义：

正弦函数$y=\sin x$在区间$\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫反正弦函数，记作$x=\arcsin y(y\in[-1,\ 1])$，习惯上的记法是$y=\arcsin x(x\in[-1,\ 1])$。

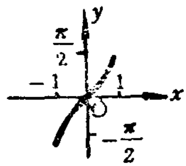
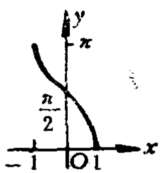
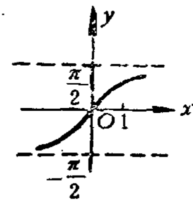
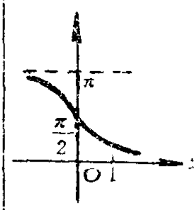
上述引入反正弦函数的过程，用框图简述如下：



反余弦函数、反正切函数、反余切函数的引入与上述反正弦函数的引入类似。今把这四个反三角函数的重点内容列于第 3 页的表中。

【教材提示】

可采用单元教学法，以反正弦函数的概念为重点，带动其他三个反三角函数。对于反正弦函数的教学，要以旧带新，逐步引深。旧内容是映射、一一映射、逆映射、反函数和正

反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\mathrm{arct}x\mathrm{g}$	$y=\mathrm{arcctg}x$
定义	正弦函数$y=\sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫反正弦函数	余弦函数$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$上的反函数叫反余弦函数	正切函数$y=\mathrm{tg}x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数叫反正切函数	余切函数$y=\mathrm{ctg}x$在区间$(0,\pi)$上的反函数叫反余切函数
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
图象				
最值	$y_{最小}=-\frac{\pi}{2}$ $(x=-1)$ $y_{最大}=\frac{\pi}{2}(x=1)$	$y_{最小}=0(\pi=1)$ $y_{最大}=\pi(x=-1)$	无	无
基本关系式	$\sin(\arcsin x)=x$ $(x\in[-1,1])$; $\arcsin(-x)=-\arcsin x$ $(x\in[-1,1])$	$\cos(\arccos x)=x$ $(x\in[-1,1])$; $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ $(x\in[-1,1])$	$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$ $(x\in R)$; $\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x(x\in R)$	$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x(x\in R)$; $\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x$ $(x\in R)$
性质	增函数；奇函数	减函数；非奇非偶函数	增函数；奇函数	减函数；非奇非偶函数

弦函数，新内容是反正弦函数的概念．按正弦函数——映射——一一映射——逆映射——反正弦函数这条主线的顺序进行．在教学中，自始至终要做到形数结合，利用图象进行讲解．

本单元的重点是：反三角函数的概念、图象和性质．

本单元的难点是：反三角函数概念的建立及其符号的意义．

本单元的教法简述如下：

1．反三角函数概念的建立

以反正弦函数为例，结合前面的知识结构框图，建立反正弦函数的概念，并引进反正弦函数的符号$\arcsin x$及恒等式$\sin(\arcsin x)=x$，通过比较对照，再建立其他三个反三角函数．

（1）在建立反正弦函数概念的过程中，要顺次复习有关的旧内容，用提问方式来启发学生．

（2）做到形数结合：从$y=\sin x$的图象出发，重点讲清"确定函数$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$的映射是区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$到$[-1,1]$上的一一映射，所以这个映射是逆映射，因此函数$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$有反函数"这句关键性的话，其中包括为什么要选取区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$．

（3）要弄清符号的含义，用提问的方式选编浅易的正反两方面的例子进行对照，以加深对符号$\arcsin x$的认识．

（4）安排好板书位置及预先画好图象，通过比较、对

照三角函数的四个图象，用彩色粉笔勾出图象的关键部分：$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$，$y=\cos x(x\in[0,\ \pi])$，$y=\mathrm{tg}x\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$，$y=\mathrm{ctg}x(x\in(0,\ \pi))$，从而引出另三个反三角函数，并写出反三角函数的符号及相应的恒等式。

2. 反三角函数的图象和性质

根据互为反函数的图象的性质，画出与正弦函数$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的一段图象关于直线$y=x$对称的反正弦函数$y=\arcsin x$的图象，同样画出其他三个互为反函数的图象。从图象上阐明反函数的单调性和奇偶性这两个性质。

（1）在图象上，要会表示一些特殊的函数值，如$\arcsin\frac{1}{2}$，$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$，$\mathrm{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$等。

（2）$y=\arccos x$与$y=\mathrm{arcctg}x$的图象比较难画，要求学生反复练习。可利用它们分别与$y=\cos x(x\in[0,\ \pi])$、$y=\mathrm{ctg}x(x\in(0,\ \pi))$的图象关于$y=x$的对称关系，弄清互为反函数的图象的相对位置。

（3）在证明恒等式$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$时要突破两点：①两个角$\arccos(-x)$、$\pi-\arccos x$的余弦值相等。②这两个角都在$y=\arccos x$的值域区间内。

这两点是证明这类恒等式的基本方法。

3. 课堂训练

课堂训练可用多种形式进行（如提问、板演、示范等），讲练结合，以练为主，并及时检查其错误，分析其原因，做

不完部分可留作课外作业.

4. 小结

在教师指导下进行小结.教师可以预先指明小结的内容和题目，供学生参考.学生也可以根据自己所学的情况，自选题目，要求在基本内容、思想和方法方面进行小结，力求全面.下面提供几方面的内容供参考：

（1）叙述三角函数与反三角函数的联系和区别.

（2）总结整理四个反三角函数的定义、定义域、图象、最值、基本关系式、性质（可参阅结构分析中的表格）.

（3）总结反三角函数基本题的类型和解法.

（4）研究形数结合方面的内容，可以用例子说明.

（5）总结与反三角函数有关的特殊值或特殊角（可用表格形式）.

小结可进行评比，较好的可供大家参考.

由于是单元教学，课堂练习和课外作业就不应按照课本的顺序进行，应与教学同步，统筹安排，妥善解决.

本单元可按单元纵向内容进行教学：概念的建立，概念的深入（图象和性质），概念的运用（练习、习题及课堂训练题）及小结.在教学中，要重点研讨和分析下面几方面的内容，并参阅“学法指导”一节.

一、概念的建立

教学时，考虑到三角函数是一个特殊的映射，并考虑到三角函数在整个定义域上都不是一个一一映射，这就要将定义域限制到一个合适的区间上，使之成为一一映射，而一一映射必有逆映射存在.然后由逆映射来确定反三角函数.

从三角函数到反三角函数的简要过程如下：

三角函数——映射

一一映射

反三角函数——逆映射

根据上述过程的共性，教学重点应放在反正弦函数概念的建立上面。

二、区间的选取

前面已讲过，当选取区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$确定$y=\sin x$的反正弦函数时，它具备了：

1．对于$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$的每一个值，$y=\sin x$有唯一的值和它对应。

2．对于x的不同的值，y有不同的值和x对应。

3．当x由$-\frac{\pi}{2}$增大到$\frac{\pi}{2}$时，y由-1增大到$+1$，也就是说，三角函数可取得它能够取得的一切值。

这三点说明了确定函数$\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$的映射正是区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$到$[-1, 1]$上的一一映射。

其实，$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$不过是正弦函数$y=\sin x$的一个单调区间，而具备上述一一映射的单调区间可以有$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$或$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$$(k\in Z)$，那么为什么要从

中选取$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$呢？这是因为它还具有下面的优点：

（1）是绝对值最小的取值集合；

（2）其中包含一切正锐角．

这两点，对于研究有关的三角问题（如三角方程等）带来方便．正因为这样，当确定$y=\sin x$的反函数时，取区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，而不取$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$等．

同样，当确定$y=\cos x$、$y=\operatorname{tg} x$、$y=\operatorname{ctg} x$的反函数时，分别取区间$[0, \pi]$、$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$、$(0, \pi)$，而不取$[-\pi, 0]$、$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$、$(-\pi, 0)$等．

三、符号的含义

符号$\arcsin x$的含义：

1．这里的x应适合$|x| \leqslant 1$．例如式子$\arcsin\frac{3}{4}$有意义，而$\arcsin\frac{4}{3}$就无意义．

2．当$|x| \leqslant 1$时，$\arcsin x$表示一个角．例如等式$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$成立．

3．当$|x| \leqslant 1$时，角$\arcsin x$的弧度数应属于区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，即$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$．

例如当写成$\arcsin x=m$时，应想到$|x| \leqslant 1$且$m \in \left[-\frac{\pi}{2},\right.$

$\left.\frac{\pi}{2}\right]$.

又如存在x，使$\arcsin x=\frac{3}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；不存在$x$，使$\arcsin x=\frac{8}{5}$，因为$\frac{8}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

4．根据反正弦函数的定义，当$|x|\leqslant 1$时，这个角的正弦值等于x，即$\sin(\arcsin x)=x$.

例如等式$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$是成立的，而等式$\sin\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$是无意义的.

对于等式$\sin(\arcsin x)=x$,对照图1-1,其结构如下：

$$\begin{tikzcd}
① x\ (|x|\leqslant 1) \arrow[r, "\text{取反正弦}"] & ② \arcsin x\left(\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right) \arrow[d, "\text{取正弦}"] \\
& ③ \sin(\arcsin x)\left[\,|\sin(\arcsin x)|\leqslant 1\,\right] \arrow[ul, dashed, "\text{按反正弦函数的定义}"]
\end{tikzcd}$$

由图可知，在函数$y=\arcsin x$上，x表示实数，而在函数$y=\sin x$上，x表示弧度数.又，$\arcsin x$表示弧度数，而$\sin(\arcsin x)$表示实数.不管是弧度数也好，实数也好，它们都在实数范围内得到和谐的统一.

同样，对于符号$\arccos x$、$\operatorname{arctg} x$、$\operatorname{arcctg} x$的意义可作相应的解释.