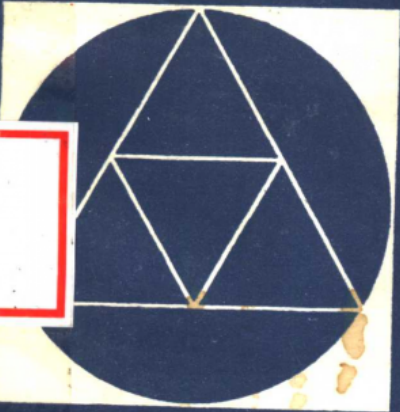
中学教师《专业合格证书》数学教材

SHUXUE

解析几何

杨大淳　主编



北京师范学院出版社

责任编辑：王汇淳

ISBN 7-81014-061-2/G·60
书号：7427·186　定价：2.20元

中学教师《专业合格证书》数学教材

解析几何

主编　杨大淳

北京师范学院出版社

1987年·北京

内容简介

本书是根据中学教师《专业合格证书》文化专业知识考试解析几何教学大纲编写，内容分为两部分。第一部分是平面解析几何复习与研究，第二部分是空间解析几何，内容包括空间直角坐标系，向量代数，平面与空间直线以及特殊曲面、二次曲面。本书选材精练，深入浅出，通俗易懂，适宜自学。除供中学教师参加合格考试用书外，还可作为业余大学、函授大学的教材，并可作为中学数学研究的参考书。

中学教师《专业合格证书》数学教材

解析几何

主编 杨大淳

北京师范学院出版社出版

(北京阜成门外花园村)

新华书店首都发行所发行 国防工业出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：12 375字数：267千

1987年11月北京第1版 1987年11月北京第1次印刷

印数：00,001—70,000册

ISBN 7—81014—061—2/G·60

统一书号：7427·186

定价：2.20元

说　明

《中共中央关于教育体制改革的决定》提出："要争取在五年或者更长一点的时间内使绝大多数教师能够胜任教学工作．在此之后，只有具备合格学历或有考核合格证书的，才能担任教师"．为了贯彻落实这一要求，国家教育委员会决定建立中小学教师考核合格证书制度，并于1986年9月颁发了《中小学教师考核合格证书试行办法》．根据该《试行办法》的规定，我们已经组织编写出版了中小学教师《专业合格证书》文化专业知识考试各科教学大纲．现在，我们又按照教学大纲的基本要求，组织编写出版这套教材，供中小学教师参加《专业合格证书》文化专业知识考试用．这套教材包括：中等师范11门课程、高等师范专科14个专业的48门课程、高等师范本科12个专业的40门课程，以及公共教育学、心理学课程用书．

这套教材的编写力求具有科学性，系统性和思想性，并努力体现以下原则和要求：要有鲜明的师范性、紧密联系中小学教学的实际；要符合成人在职进修的特点，便于教师自学、自检；要使大多数教师经过努力可能达到规定的要求．

考核合格证书制度刚刚试行，尚缺少经验，加之这套教材出版时间仓促，难免存在一些问题．我们准备继续在实践中探索和研究，争取用几年的时间，建设一套适合我国中小学在职教师进修的教材，希望全国师范教育工作者，尤其是

从事在职中小学教师培训工作的同志为此共同努力。

这套教材在编写、出版和发行工作中，得到了各省、自治区、直辖市教育行政部门，许多师范院校、教育学院、教师进修学校和师资培训中心，许多专家和教师，以及有关出版社和教材发行部门的大力支持和帮助，在此，一并致谢。

国家教育委员会师范教育司

一九八七年六月一日

编 者 的 话

本书的主要内容分为两部分。第一部分是平面解析几何，包括直线、参数方程、极坐标方程和二次曲线的一般理论等四章。第二部分是空间解析几何，在坐标系的基础上，以向量代数为基本工具，着重讨论了平面和直线、二次曲面以及二次曲面的分类。本部分设置五章。

本书由杨大淳主编，刘增贤主审。陈通鑫参加编写了平面部分的第一章及第四章；张克东参加编写了平面部分的第二章、第三章以及空间部分的第一章；王汇淳参加编写了空间部分的第二章和第三章；王敬庚参加编写了空间部分的第四章和第五章。

限于编者水平，本书会有不当甚至错误之处，欢迎读者指正。

编者

1987.7.

目　　录

平面解析几何

空间解析几何

平面解析几何

第一章 直　　线

我们知道，根据确定直线的不同的条件，直线的方程就有各种不同的表达形式。

§1.1 直线方程的几种形式

1. 点斜式

已知直线 l 过定点 $P_1(x_1, y_1)$，斜率是 k，直线 l 的方程是

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{1.1}$$

2. 斜截式

已知直线 l 的斜率是 k，它和 y 轴交于 $P_1(0, b)$ 点，直线 l 的方程是

$$y=kx+b. \tag{1.2}$$

3. 两点式

已知直线 l 通过两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，直线 l 的方程是

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{1.3}$$

4．截距式

已知直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b（$a\neq 0$，$b\neq 0$），直线 l 的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1.4}$$

练 习 1.1

1．求下列各直线的方程，并作图：

（1）斜率为 4，过（-2，3）点；

（2）过原点，倾角 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$；

（3）过（5，-4），（-3，2）两点；

（4）x 轴；

（5）过原点，平分二、四象限。

2．已知直线上两点的坐标 $A\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$、$B$（2，1），求直线上横坐标为 1 的 C 点的纵坐标。

3．求下列直线的斜率和在 x 轴、y 轴上的截距，并作图。

（1）$3x+y-5=0$；（2）$x=5y+2$；

（3）$x+2y=0$；（4）$7x-6y+4=0$。

4．已知 A（3，3）和 B（-1，-5）两点，求过点 M（-3，2）且与 AB 平行的直线方程。

5．$\triangle ABC$ 的三个顶点是 A（5，3），B（7，-1），C（-1，5），求三条高所在的直线方程。

6．已知 $\triangle ABC$ 中，顶点 A 的坐标为（1，3），AB、AC 边上的中线方程分别是 $x-2y+1=0$ 和 $y-1=0$。求各边的方程。

§ 1.2 直线方程的一般形式

现在我们进一步研究直线方程的一般形式。

1. 直线和二元一次方程的关系

直线和二元一次方程之间有着密切的关系。这种关系可用下面的定理来表达。

定理1.1 任何直线都可用含有变量 x 和 y 的一次方程来表示。反之，任何含有变量 x 和 y 的一次方程都表示一直线。

证 我们知道，平面内的直线和 y 轴的关系只有两种：平行于 y 轴和不平行于 y 轴。

平行于 y 轴（或与 y 轴重合）的直线，它们的方程都可以写成

$$x = a$$

的形式(当 $a = 0$ 时，直线与 y 轴重合)。

不平行于 y 轴的直线，它们的方程都可以写成

$$y = kx + b$$

的形式。而 $y = kx + b$ 是一次方程。如果平行于 x 轴，可以写成 $y = b$。当 $b = 0$ 时，直线与 x 轴重合。

根据以上的讨论，我们证明了定理1.1的前半部分，即任何一条直线都可用含有变量 x 和 y 的一次方程来表示。

然后，我们证明，任何含有变量 x 和 y 的一次方程都表示一条直线。

我们知道，含有变量 x 和 y 的一次方程都可写成

$$Ax + By + C = 0. \tag{1.5}$$

这里 A，B，C 是任意实数。并且 A、B 不同时为零。现在分 $B \neq 0$ 和 $B = 0$ 两种情况加以研究。

（1）$B\neq0$ 的情况

方程（1.5）可化成

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

这是直线的斜截式方程，它的斜率是$-\frac{A}{B}$，在y轴上的截距是$-\frac{C}{B}$。

（2）$B=0$ 的情况

如果$B=0$，那么$A\neq0$，方程（1.5）可化成$x=-\frac{C}{A}$。

这是平行于y轴（当$C=0$时，与y轴重合）的直线。

此时，定理1.1全部证毕。

由于二元一次方程和直线间有着定理中所说的对应关系，因此我们把方程（1.5）叫做直线的一般式方程。

2. 两个独立的条件决定一条直线

当$A\neq0$时，方程$Ax+By+C=0$可以化成

$$x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}=0. \tag{1}$$

当$B\neq0$时，方程$Ax+By+C=0$可以化成

$$\frac{A}{B}x+y+\frac{C}{B}=0. \tag{2}$$

方程（1）和（2）都只有两个独立常数，即有了两个独立条件，并且只需要有两个独立条件（如经过两个不相重合的已知点或经过一个已知点并且平行于一条已知直线等），就可以决定这两个常数的值。这就说明了两个独立条件决定一条直线。

3. 直线方程几种形式的互化

直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式都可以化成一般式。例如，两点式方程

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

化成一般式可得

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1).$$

即 $(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+x_1y_2-x_2y_1=0.$

这里 $A=y_1-y_2$，$B=x_2-x_1$，$C=x_1y_2-x_2y_1$。

反过来，由直线方程的一般式，可以化为其它几种特殊的形式。下面分别予以说明：

（1）化为斜截式

假定$B\neq 0$。

用B除方程$Ax+By+C=0$的两边，再移项可得

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

由此可知，直线$Ax+By+C=0$，当$B\neq 0$时，它的斜率等于$-\frac{A}{B}$，y轴上的截距等于$-\frac{C}{B}$。

（2）化为截距式

当A，B，C都不等于零时，方程$Ax+By+C=0$可以化成截距式。

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

这里 $a=-\frac{C}{A}$，$b=-\frac{C}{B}$。

（3）化为两点式

设 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$是直线

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

上的两点。那么 P_1 和 P_2 的坐标一定满足方程。即

$$Ax_1+By_1+C=0, \tag{2}$$

$$Ax_2+By_2+C=0. \tag{3}$$

由(1)和(2)消去C，得

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{4}$$

由(2)和(3)消去C，得

$$A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)=0. \tag{5}$$

由(4)和(5)消去A和B，得

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{6}$$

这就是直线的两点式方程。

（4）化为点斜式

把方程(6)化成

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1).$$

因为$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$是直线的斜率，设它为k，就得

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

这就是直线的点斜式方程。

练　习　1.2

1. 求满足下列条件的直线方程，并化为 $Ax+By+C=0$ 的形式，再作图。

（1）斜率是 $-\frac{1}{2}$，经过(8，−2)点；

（2）经过$(-4,5)$点，倾角是$\frac{2\pi}{3}$；

（3）经过$(4,2)$点，平行于x轴；

（4）经过$\left(-\frac{1}{2},0\right)$点，平行于$y$轴；

（5）经过$(3,-2)$和$(5,-4)$两点；

（6）在x轴上截距是-5，倾角是$\frac{\pi}{4}$。

2．直线经过点$P(2,-3)$，且满足下列条件，求直线方程。

（1）它的倾角的正弦是$\frac{4}{5}$；

（2）它的倾角是直线$y=\frac{1}{2}x$的倾角的二倍。

3．求证直线$x+2y-5=0$，$2x+4y+5=0$，$2x-y=0$，$7x-11y-35=0$围成一个直角梯形。

§1.3 直线的法线式方程

前面已经研究了几种类型的直线方程，但是这些方程除了直线的一般式方程外，都有一个共同的缺点，就是它们不能表达某些特殊情况下的直线。如平行于y轴的直线，用点斜式、斜截式、两点式和截距式方程都不能表达出来，因此，我们还要建立另一种直线方程——直线的法线式方程，它不但可以表示一切情况下的直线，而且还可以用来求点到直线的距离。

1．直线的法线和法线的幅角

我们知道，两个独立条件决定一条直线。建立直线的法线式方程，也需要两个独立条件，根据直线的不同位置，分别讨论如下：

（1）直线l不经过原点