考试无忧系列丛书

本书适合大学及考研复习

最新高等数学·方法与技巧

主编 北京大学数学科学学院博士 乌健伟

FANG FA YU JI QIAO

（上册）

ZUI XIN GAO DENG SHU XUE

Tutorials Written By Eminent Professors

考试无忧

中央民族大学出版社

考试无忧系列丛书

最新高等数学·方法与技巧

（上册）

（本书适合大学及考研复习）

主　编：北大数博：马建伟
编　者：北大数博：彭建平
北大数博：丁　焱
北大数博：谢践生

中央民族大学出版社

责任编辑:杨　玉
封面设计:胡瑞华
总策划:李文明、盘黎明

图书在版编目(CIP)数据

最新高等数学·方法与技巧/乌健伟编著.—北京:中央民族大学出版社,2002.9

ISBN 7-81056-681-4

Ⅰ.最… Ⅱ.乌… Ⅲ.高等数学 -高等学校-自学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057277 号

最新高等数学·方法与技巧(上)
乌健伟　编著

中央民族大学出版社出版发行
(北京市中关村南大街 27 号)
联系电话:010-68934855　13601367448
各地新华书店经销
开本:850×1168　1/32　印张:31.125　字数:800 千字
2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
印数:10000 册
共 552 页　17.25 印张

ISBN 7-81056-681-4/O.1
定价:36.00 元(全两册)

前　言

高等数学是各类高等院校的一门重要的基础课。同时,也是硕士研究生入学考试所必考的课程。学好这门课程,无论是对于后续课程的学习,还是对于人生的进一步发展,都有着极为重要的意义。

在众多的高等数学辅导类书籍中,依笔者看来,一部分以总结知识点为主要内容,另一部分则相当于考研的习题集,缺少一类与教材同步的、系统的讲述方法与技巧方面的书。这使得许多同学在学习过程中,除教材和与之配套的习题集外,缺少训练方法与技巧方面的系统性的指导书。在期末复习或考研复习时,也没有进一步深化的方向,而只能无的放矢地淹没在题海之中。

本书的编写目的,是向读者尽可能细致地介绍高等数学这门课程的方法与技巧,系统地讲述那些由于课时所限教师无法讲清讲细,而又应该掌握的东西。在内容的安排上,本书的顺序与教材的顺序一致。这样做既有利于学习过程中技巧与方法的掌握与拓展,又有利于复习阶段的总结与提高。

在各章的第一部分,给出了该章教材内容的提要,以方便读者查阅。

第二部分为例题与习题。在一元部分,以夹叙夹议的方式,说明技巧与方法的使用。在多元部分,则以分析和说明的方式,更加细致地给出思路上的描述。各节末所选配的习题,是本书的重要组成部分。这些习题是专门用来演练该节所涉及到的方法与技巧的。在例题与习题中,选编了很多近年来的硕士研究生入学试题。

原因是研究生入学试题并不是所谓的“难题”！相反的，我们认为这些题目更好地体现了教材的内容，以及近年来教学上的某些变化。同时，这类问题也更多地包含了这门课程的方法与技巧。

每章的第三部分给出了该章习题的答案与提示，但建议读者还是在掌握方法、技巧的基础上，独立作完习题后再翻看这部分内容。你付出的劳动越多，你的收获就会越大！这一点请读者切记。

本书的一、二、三、四、十二章由乌建伟执笔，五、六、七章由彭建平执笔，第八章由丁焱执笔，第九、十、十一、十三章由谢践生执笔。全书最后由乌建伟统稿审定。

在本书的编写过程中，我们参阅了许多学者的著作，在此一并致谢！

编者于北京大学
2002 年 9 月

目 录

第一章 函 数

一、内容提要

1. 集合

所谓集合,就是由一些确定的事物组成的整体,构成集合的事物称为集合的元素 . 集合通常用大写字母 A、B、C…来表示;集合的元素通常用小写字母 a、b、c…来表示 .

如果 a 是 A 的一个元素,则记作 $a\in A$;如果 a 不是 A 的元素,就记作 $a\notin A$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

通常有两种方式表示集合:一种是列举法,即把集合中的所有元素写在一个花括号中;另一种是描述法,即通过各元素必须满足的性质来描述 .

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的每个元素都是 B 的元素,则称 A 为 B 的子集,记作 $A\subset B$;如果 $A\subset B$,$B\subset A$,则称 A 和 B 相等,记作 $A=B$;如果 $A\subset B$,$A\neq B$,则称 A 为 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$. 空集是任何集合的子集 .

2. 集合的运算

设 A 和 B 是两个集合,由 A 的元素和 B 的元素全体构成的集合称为 A 与 B 的并,记作

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由既属于 A 又属于 B 的元素全体构成的集合称为 A 与 B 的交,记作

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由属于 A 而不属于 B 的元素全体构成的集合称为 A 与 B 的

差,记作

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 而 } x\notin B\};$$

如果 $B\subset A$,差集 $A-B$ 称为 B 关于 A 的余集,记作 B_A^C 或简记为 B^C.

设 A,B,C 为三个集合,则集合的运算具有以下基本性质:

(1) $A\cup A=A, A\cap A=A$;

(2) $A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$;

(3) $A\cap B\subset A(\text{或 }B)\subset A\cup B$

(4)若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B, A\cap B=A$;

(5)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(6)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(7)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(8)对偶律　$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C, (A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

上述性质可推广至任意多个集合的情形.

我们常用的实数集合是区间:

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$,　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$,

其中 a,b 即可以是实数,也可以为 ∞. 如 $(-\infty,+\infty)$ 就表示整个数轴,$[0,+\infty)$ 就表示正半轴.

特别,设 $\delta>0$ 是一个正数,则称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的一个 δ-邻域,x_0 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径. 集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ-邻域,它由 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 两个开区间构成,分别称为 x_0 的左邻域和右邻域.

3. 函数及其表示

在自然或经济系统中,常常遇到各种不同的量,其中有的量在某个过程中不起变化,也就是保持一定的数值,这种量称为常量;

还有一些量有时取不同的数值,是变化的,这种量叫做变量.

设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.数集

$$Z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.集合

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的图形.

函数通常可以用下述方式之一或它们相结合来表示:

公式法　因变量 y 用自变量 x 的数学式子来表示;

表格法　把自变量 x 和因变量 y 的对应值列表表示;

图形法　函数的图形 C 在 xoy 平面上的表示.

4. 函数的几种特性

函数的有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,如果存在正数 M,使得与任一 $x\in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.否则就称 $f(x)$ 在 X 上无界.

函数的单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.相应的区间 I 称为单调增(或减)区间.

函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若

$x\in D$,则必 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为偶函数. 如果对于任一 $x\in D$

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为奇函数.

函数的周期性　设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D$,有$(x\pm T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期,通常我们说周期函数的周期是指最小正周期(如果存在).

5. 反函数,复合函数,初等函数

设函数 $y=f(x)$是由其定义域 D 到值域 Z 的 1-1 对应,即对于 Z 中的每一个数值 y,都可以确定唯一的 $x\in D$,使 $y=f(x)$成立. 于是根据函数的定义,我们就得到一个以 Z 为定义域,D 为值域的函数,记为 f^{-1},称为 $y=f(x)$的反函数. 这时,x 是 y 所对应的函数值:$x=f^{-1}(y)$. 习惯上,常用 x 表示自变量,y 表示因变量,所以我们用 $y=f^{-1}(x)$表示 $y=f(x)$的反函数.

函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 是对称的.

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$的值域为 Z_g,如果 $D_f\cap Z_g\neq\varnothing$,则可把 $u=g(x)$代入 $y=f(u)$,而构成复合函数 $y=f(g(x))$,其中 u 称为中间变量,此函数的定义域为 $D=\{x\in D_g \mid g(x)\in Z_g\cap D_f\}$.

函数 $y=x^{\mu}$(μ 是常数)叫做幂函数,其定义域与 μ 的取值有关. 如当 $\mu=3$ 时,$D=(-\infty,+\infty)$;当 $\mu=\frac{1}{2}$时,$D=[0,+\infty)$;当 $\mu=-\frac{1}{2}$时,$D=(0,+\infty)$.

函数 $y=a^x$(a是常数且 $a>0, a\neq 1$)叫做指数函数,它的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

指数函数 $y=a^x$ 的反函数记作 $y=\log_a x$(a是常数且 $a>0, a\neq 1$),叫做对数函数．当 $a=e$ 时,称 $y=\log_e x$ 为自然对数函数,简记为 $y=\ln x$.

正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\mathrm{tg}\, x$,余切函数 $y=\mathrm{ctg}\, x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$ 统称为三角函数,它们的反函数统称为反三角函数．

上述五类函数统称为基本初等函数．由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所构成,且可用一个式子表示的函数,称为初等函数．

二、例题与习题

这一章基本内容包括：函数的定义与图象，反函数，复合函数，初等函数；以及一些函数的最基本的性质，如奇偶性、周期性、单调性等．在习题中，这些内容常常交叉出现，以致于使人觉得难以把握．因此最好的办法是彻底弄清最基本的概念后，通过解题来掌握一些常用的方法和技巧．

§1. 定义域及表示方法

定义域是使函数的数学表达式有意义的一切实数的集合．

求函数定义域的要领在于：

(1)牢记五类基本初等函数的定义域；

(2)熟练掌握各类不等式(组)的解法．

例 1.求 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$的定义域．

解：若使 $f(x)$有意义，则必须要求 $1-x^2\neq 0$ 及 $x+1\geqslant 0$. 交集为

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+1\geqslant 0\end{cases}$$

解这个不等式组，得这个函数的定义域为：$(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 2　求 $y=\arccos(2^x-3)+\lg(\lg x)$的定义域．

解：要使函数 y 有意义，则应要求 x 满足

$$\begin{cases}|2^x-3|\leqslant 1\\ x>0\\ \lg x>0\end{cases}$$

解上述不等式组，可得定义域为：$(1,2]$.

例 3　设 $f(x)=ln\dfrac{2+x}{2-x}$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$的定义域．

解：显然有

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ln\frac{2+x}{2-x}+ln\frac{x+1}{x-1}$$

于是根据对数函数及分式函数的性质，使得

$$\begin{cases}\dfrac{2+x}{2-x}>0\\ x\neq 2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}>0\\ x\neq 1\end{cases}$$

它们等价下述四个不等式组

$$\begin{cases}2+x>0\\ 2-x>0\\ x\neq 2\end{cases}\qquad \begin{cases}2+x<0\\ 2-x<0\\ x\neq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+1>0\\ x-1>0\\ x\neq 1\end{cases}\qquad \begin{cases}x+1<0\\ x-1<0\\ x\neq 1\end{cases}$$

解之便得 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为：$(-2,-1)\cup(1,2)$.

由上述例子可见，求函数的定义域问题，通常是利用“分母不为零”、“真数部分大于零”、“反正弦（反余弦）下的部分绝对值小于等于1”等这些初等性质，总结出一个或几个不等式组，正确地解出这些不等式组所代表的交集，即是函数的定义域.

例4　设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解：将 $g(x)$ 代入 $f(x)$（注意：此时 $f[g(x)]$）的定义域要由 $g(x)$ 取值情况求出），得出

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & |g(x)|<1\\ 0 & |g(x)|=1\\ -1 & |g(x)|>1\end{cases}$$

因 $g(x)=e^x$,故 $|g(x)|<1$ 等价于 $x<0$, $|g(x)|=1$ 等价于 $x=0$, $|g(x)|>1$ 等价于 $x>1$. 于是得

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<1\\ 0 & x=1\\ -1 & x>1\end{cases}$$

同理,求 $g[f(x)]$时,首先我们得到

$$g[f(x)]=e^{f(x)}$$

而由 $f(x)$在其定义域各部分上的表达式,就有

$$g[f(x)]=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$$

例 5　设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$及其定义域 .

解:首先 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$,又 $f[\varphi(x)]=1-x$,故得 $e^{\varphi^2(x)}=(1-x)$于是便得 $\varphi^2(x)=ln(1-x)$. 而 $\varphi(x)\geqslant 0$,从而

$$\varphi(x)=\sqrt{ln(1-x)}$$

例 6　设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ 2+x & x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$,则 $g[f(x)]=$__________.

解:将 $f(x)$代入 $g(x)$(包括定义域部分)

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x) & f(x)\leqslant 0\\ 2+f(x) & f(x)>0\end{cases}$$

而由 $f(x)$的表达式,当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=-x\leqslant 0$,当 $x<0$ 时, $f(x)=x^2>0$. 于是得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x & x\geqslant 0\\ 2+x^2 & x<0\end{cases}$$

例 7　设 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$.

解:令 $x+1=u$,则 $x=u-1$. 并且有

$$f(u)=(u-1)^2-3(u-1)+2$$
$$=u^2-5u+6$$

将 $f(u)$中自变量符号改写为 x,则得

$$f(x)=x^2-5x+6$$

从例 4~例 7 可见,关于函然的表示方法,内容较为丰富．变化的形式也较多．在这类问题中,需要注意是:解题时要牢牢记住每个函数符号的含义．当遇到两个分段函数进行复合时,要十分注意定义域的变化．

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

(2) $y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$

(3) $y=\lg[\cos(\lg x)]$

(4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$

(5) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$

(6) $y=\arccos\dfrac{x}{[x]}$

2. 设 $y=f(x)$的定义域为$(0,1)$,求下列函数的定义域:

(1) $f(\sin x)$

(2) $f(\ln x)$

(3) $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$

(4) $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$

3. 设 $f_n(x)=\underbrace{f[f(f\cdots f}_{n\text{ 次}}(x)]$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x)$.