

高中数学

龙门 专题

排列 组合 概率

主编 傅荣强

本册主编 朱岩

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots \\ &\quad + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n \\ (n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

最新修订



龍門書局

www.Longmen.com.cn

排列组合 概率

最新修订



主 编 傅荣强

本册主编 朱 岩

编 者 朱 岩 常 青 李 利

石兴涛 柴 华 高 波



龍 門 書 局

北京

版权所有 翻印必究

举报电话:(010)64034160,13501151303(打假办)

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

排列 组合 概率/傅荣强主编;朱 岩本册主编.—修订
版.—北京:龙门书局,2005

(龙门专题)

ISBN 7-80160-136-X

I.排… II.①傅…②朱… III.数学课—高中—教学参考资
料 IV.G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 081158 号

责任编辑:马建丽 韩安平/封面设计:郭 建

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.longmen.com.cn>

北京人卫印刷厂 印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2001 年 2 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2005 年 8 月第四次修订版 印张:7

2005 年 8 月第十六次印刷 字数:256 000

印数:340 001—370 000

定 价: 9.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、语文、英语、地理、生物七个学科,共计 112 种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“知识点精析与应用”着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“视野拓展”则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为“拓展”,但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行“3+X”高考模式以后,这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局品牌教辅的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以“专”为先 本套书共计 112 种,你尽可以根据自己的需要从中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释,读过一本后,可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析,对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识,能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小,更易于理解和记忆。

3. 省时增效 由于“专题”内容集中,每一本书字数相对较少,学生可以有针对性地选择,以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及,并分别自成一册;“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排,而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题,即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系,从而自然地连点成线,从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义,以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例,使学生能够根据自己的情况,权衡轻重,提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,讲、练到位,对于提高学生对其一专题学习的相对效率,大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖,编写难度很大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请不吝指正。

编 者

2005年8月

编者的话

《龙门专题·高中数学》在面世近几年的时间里,以其传承经典、创新脱俗的写作风格,赢得了广大读者的一致称道。策划、作者、编辑、版务于其中呕心沥血、殚精竭虑,使得每一次修订后的《龙门专题·高中数学》年年更上新台阶。

本次《龙门专题·高中数学》修订版有以下特点:

一、知识讲解有广度有深度

“知识点精析与应用”栏目,覆盖了本阶段的全部内容,循序渐进,深入浅出,除了基本的讲解之外,还校正了一些思维上的偏差,有广度,有深度。

二、题目搭配有梯度有难度

书中例题与习题的选取,瞄准高考,从易到难,使潜心研读的读者能一步跃上一个台阶;同时本书又为学有余力的读者配置了一定数量的难题,尤其是创新脱俗的开放性试题。此外,本书配备例题、习题时,注意到联系已经学过的内容,使之形成上下贯通、前后衔接、左右协调、立体交叉的优良格局。

三、视野拓展有高度有尺度

“视野拓展”栏目,旨在学习方法、思维形式、解答策略等方面的拓展,对许多知识点实施了引入、扩充、推广,在力求高度的同时,又把握一定的尺度,使之既超过了高考试题的难度,又不偏离高考方向。

四、高考探索有精度有力度

“高考探索”栏目收集了最新的高考试题,一年一更新。作者精辟分析了试题产生的背景、形成过程乃至发展,并附高考探索训练题、精度高、力度大。近几年高考试题与书中例题、习题相似、相同的不乏其例,足见使用《龙门专题·高中数学》复习高考的广阔前景。

由于水平所限,书中还有缺点和不足,敬请广大读者批评指正。

编者

2005年8月

目 录

第一篇 基础篇	(1)
第一讲 排列	(2)
1.1 分类计数加法原理与分步计数乘法原理	(2)
1.2 排列	(19)
高考热点题型评析与探索	(39)
本讲测试题	(43)
第二讲 组合	(53)
2.1 组合	(53)
2.2 排列与组合的综合运用	(74)
高考热点题型评析与探索	(94)
本讲测试题	(98)
第三讲 二项式定理	(110)
3.1 二项式定理	(110)
3.2 二项式系数的性质	(126)
高考热点题型评析与探索	(140)
本讲测试题	(145)
第四讲 概率与统计	(154)
4.1 等可能事件的概率	(154)
4.2 互斥事件有一个发生的概率	(163)
4.3 相互独立事件同时发生的概率	(169)
4.4 离散型随机变量	(175)
高考热点题型评析与探索	(193)
本讲测试题	(200)

第二篇 综合应用篇 (202)

排列、组合、二项式定理、概率的理论应用 (202)

一、排列、组合的应用 (203)

二、二项式定理的应用 (206)

三、概率的应用 (210)

排列、组合、二项式定理、概率的实际应用 (210)

一、排列、组合的实际应用 (211)

二、二项式定理的实际应用 (213)

三、概率的实际应用 (214)

综合应用训练题 (214)

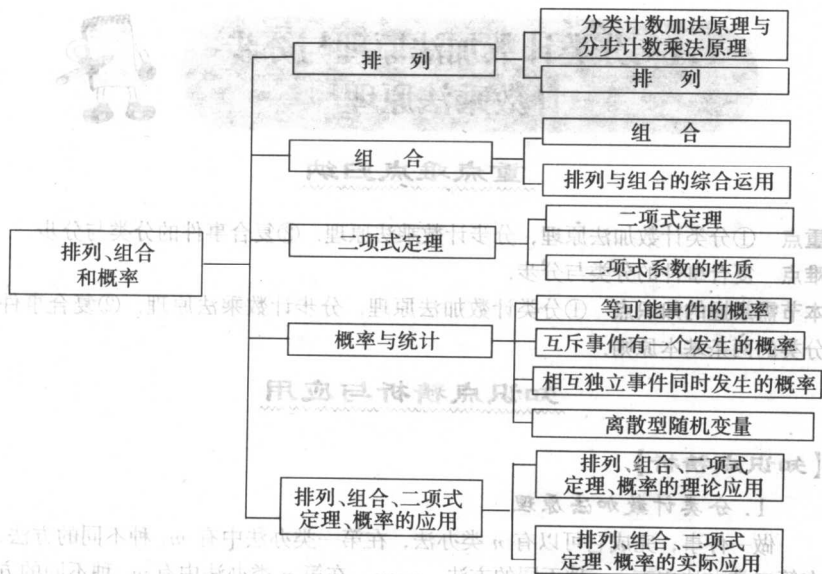
第一篇 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”与“形”的学科。本书包括“排列，组合，二项式定理，概率”等四部分内容。

排列、组合的本质是研究“从 n 个不同的元素中，任取 m ($m \leq n$) 个元素，有序与无序摆放的各种可能性”。解答排列、组合问题的思维模式可用四句话概述为：排列有序；组合无序；分类要独立，用分类计数加法原理计算；分步要连续，用分步计数乘法原理计算。

二项式定理揭示了二项展开式 $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$ 的规律性，即每一项都具有 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$ 的形式。

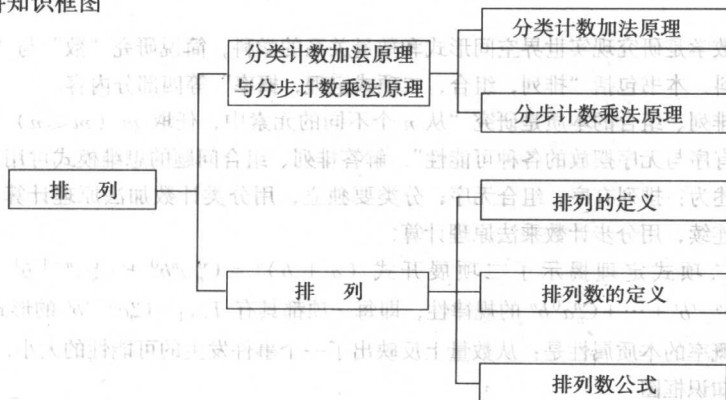
概率的本质属性是：从数量上反映出了一个事件发生的可能性的。大小。
本书知识框图





第一讲 排列

本讲知识框图



1.1 分类计数加法原理与分步计数乘法原理



重点难点归纳

重点 ①分类计数加法原理，分步计数乘法原理. ②复合事件的分类与分步.

难点 复合事件的分类与分步.

本节需掌握的知识点 ①分类计数加法原理，分步计数乘法原理. ②复合事件分类的两条基本原则.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 分类计数加法原理

做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

2. 分步计数乘法原理

做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法， $\dots$ ，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 种不同的方法。

3. 分类计数加法原理的集合表述形式

做一件事，完成它的办法用集合 S 表示， S 被划分成 n 类办法分别用非空集合 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 表示，即 $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ ，且 $S_i \cap S_j = \emptyset (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n)$ ， $S_1, S_2, \dots, S_n$ 中分别有 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 种不同的方法，即集合 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 中分别含有 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 个元素，那么完成这件事共有的方法，即集合 S 中元素的个数为

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

非空集合 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 的并集等于全集 S ，任意两个的交集等于空集 $\emptyset$

分类计数加法原理的文恩氏图表示见图 1-1.

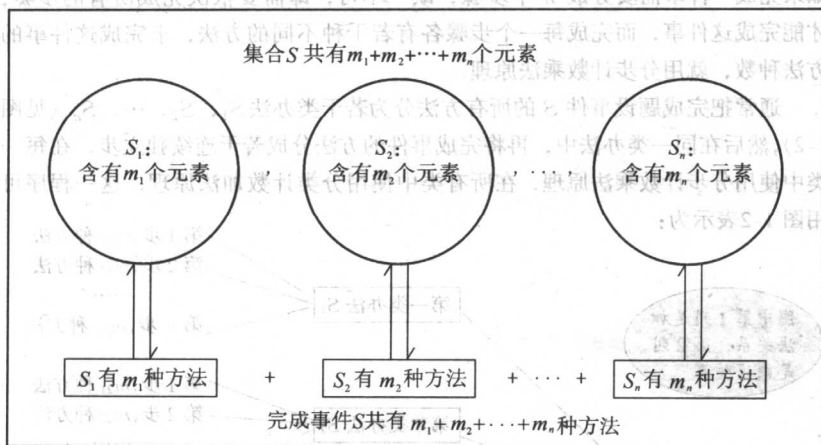


图 1-1

4. 应该如何理解“分类”与“分步”？

先分类后分步，不漏不重

(1) 分类：“做一件事，完成它可以有 n 类办法”，这是对完成这件事的所有办法的一个分类。分类时，首先要根据问题的特点确定一个适合于它的分类标准，然后在这个标准下进行分类；其次，分类时要注意满足两条基本原则：①完成这件事的任何一种方法必须属于某一类；②分别属于不同两类的两种方法是不同的方法。只有满足这两条基本原则，才可以保证集合形式表述的分类计数加法原理的“ $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ ， $S_i \cap S_j = \emptyset$ ”两条基本原则，前者保证完成这件事的

方法不遗漏,后者保证不重复,即使用分类计数加法原理的“不漏不重”。

解答排列、组合问题,最怕的就是“遗漏,重复”

(2) 分步:“做一件事,完成它需要分成 n 个步骤”,这是说完成这件事的任何一种方法,都要分成 n 个步骤。分步时,首先要根据问题的特点,确定一个可行的分步标准;其次,步骤的设置要满足完成这件事必须并且只需连续完成这 n 个步骤后,这件事才算最终完成。

分步的精髓在于步骤的“连续”与“独立”,“连续”确保问题不遗漏,“独立”确保问题不重复

5. 分类计数加法原理与分步计数乘法原理,如何选用?

分类:用分类计数加法原理;分步:用分步计数乘法原理

两个原理的区别在于一个和分类有关,一个与分步有关。如果完成一件事有 n 类办法,这 n 类办法彼此之间是相互独立的,无论哪一类办法中的哪一种方法都能单独完成这件事,求完成这件事的方法种数,就用分类计数加法原理;如果完成一件事需要分成 n 个步骤,缺一不可,即需要依次完成所有的步骤,才能完成这件事,而完成每一个步骤各有若干种不同的方法,求完成这件事的方法种数,就用分步计数乘法原理。

通常把完成题设事件 S 的所有方法分为若干类办法 $S_1, S_2, \dots, S_n$ (见图 1-2),然后在同一类办法中,再将完成事件的方法分成若干连续独立步,在每一类中使用分步计数乘法原理,在所有类中使用分类计数加法原理。这一程序可用图 1-2 表示为:

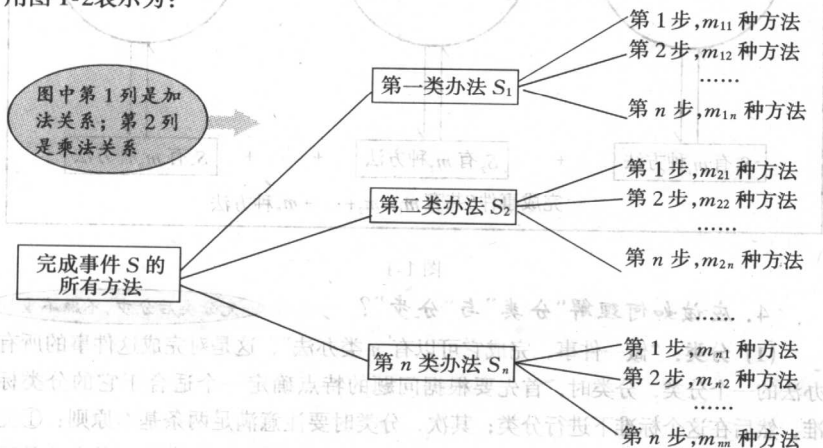


图 1-2

于是,完成事件 S 共有 $(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n}) + (m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2n}) + \dots + (m_{n1}, m_{n2}, \dots, m_{nn})$ 种不同的方法。

【解题方法指导】

1. 分类计数加法原理问题

【例1】高三一班有学生50人，男30人，女20人；高三二班有学生60人，男30人，女30人；高三三班有学生55人，男35人，女20人。

(1) 从高三一班、或二班、或三班中选一名学生任校学生会主席，有多少种不同的选法？

(2) 从高三一班、二班男生中，或从高三三班女生中选一名学生任校学生会体育部长，有多少种不同的选法？

解 (1) $50 + 60 + 55 = 165$ (种)，即所求选法有165种。

(2) $30 + 30 + 20 = 80$ (种)，即所求选法有80种。

【例2】三边长均为整数，且最大边长为11的三角形的个数为 ()

A. 25 B. 26 C. 36 D. 37

解 另两边边长用 x, y 表示，且不妨设 $1 \leq x \leq y \leq 11$ 。要构成三角形，必须 $x + y \geq 12$ 。

当 y 取值11时， $x = 1, 2, 3, \dots, 11$ ，可有11个三角形。

当 y 取值10时， $x = 2, 3, \dots, 10$ ，可有9个三角形。

.....

当 y 取值6时， x 也只能取6，只有一个三角形。

$\therefore$ 所求三角形的个数为 $11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36$ 。

选 C。

2. 分步计数乘法原理问题

【例3】用数字1, 2, 3可以组成多少个四位数？

分析 完成这件事可分为四个步骤：第一步确定千位数，第二步确定百位数，第三步确定十位数，第四步确定个位数。这四步依次完成了，这件事就完成了。所以可用分步计数原理求解。

解 要组成一个四位数可以分成四个步骤：第一步确定千位上的数字，从3个数字里任选一个数字，共有3种选法；第二步确定百位上的数字，依题意数字允许重复，仍有3种选法；第三步确定十位数字，同理，也有3种选法；同理，第四步，也有3种选法。

根据分步计数乘法原理得到可以组成的四位数的个数是：

$$N = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81.$$

【例4】五名旅客在三家旅店投宿的方法有多少种？

分析 完成这件事，可分成五个步骤：这五个步骤依次是：安排旅客A，安排旅客B，安排旅客C，安排旅客D，安排旅客E，这五步完成了，这件事

∵ $x \leq y$ ，假设 $x \leq 5$ ，则 $x + y \leq 11$ ，这与 $x + y \geq 12$ 矛盾

就完成了, 因此可用分步计数乘法原理.

解 完成这件事, 可分成五个步骤: 第一步安排旅客 A, 有 3 种投宿方法; 同理第二步, 第三步, 第四步, 第五步都各自有 3 种方法.

根据分步计数乘法原理, 五名旅客在三家旅店投宿的方法有

$$N = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243 \text{ (种)}.$$

[例 5] 用 5 种不同的颜色给图 1-3 中的 A、B、C、D 四个区域涂色, 规定每个区域只涂一种颜色, 相邻区域颜色不同, 求有多少种不同的涂色方法?

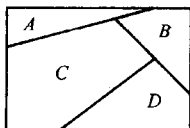
解 分四个步骤来完成涂色这件事.

涂 A 有 5 种涂法;

涂 B 有 4 种方法;

涂 C 有 3 种方法;

涂 D 有 3 种方法(还可以使用涂 A 的颜色).



根据分步计数乘法原理共有 $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ 种涂色方法. 图 1-3

[例 6] (1) 将 4 封信投入 3 个邮筒, 有多少种不同的投法?

(2) 3 位旅客, 到 4 个旅馆住宿, 有多少种不同的住宿方法?

(3) 8 本不同的书, 任选 3 本分给 3 个同学, 每人一本, 有多少种不同的分法?

解 (1) 分四步. 每一封信都有 3 种不同的投法, 所以共有不同的投法 $N = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ (种).

(2) 分三步. 每位旅客都有 4 种不同的住宿方法, 所以共有不同的方法 $N = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$ (种).

(3) 分三步. 每位同学取书一本, 第 1, 2, 3 个同学分别有 8, 7, 6 种取法, 所以共有不同分法 $N = 8 \times 7 \times 6 = 336$ (种).

[例 7] 在 3 张卡片的正反两面上, 分别写着 1 和 2, 4 和 5, 7 和 8, 将它们并排组成三位数, 共有多少个不同的三位数?

解 每张卡片都分正反两面, 三张卡片朝上出现的数字都有两种情况, 共 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 种情况. 如 1, 4, 7 是这 8 种情况中的一种, 由这三个数字可组成的三位数的个数是: $3 \times 2 \times 1 = 6$, 具体写出来是: 147, 174, 417, 471, 714, 741. 所以可组成的三位数共有 $N = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1) = 48$ (个).

[例 8] 从 $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 中, 任取 3 个不同的数作为抛物线方程 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的系数, 如果抛物线过原点, 且顶点在第一象限, 则这样的抛物线共有多少条?

解 由抛物线过原点, 得 $c = 0$, 顶点在第一象限, 得 $a < 0$, $b > 0$. 分三步, $a = -3, -2, -1$; $b = 1, 2, 3$; $c = 0$. 所以抛物线的条数 $N = 3 \times 3 \times 1 = 9$ (条).

点评 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 且顶点在第一象限, a 、 b 、 c 应满足

$$\begin{cases} 0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c, \\ -\frac{b}{2a} > 0, \\ \frac{4ac - b^2}{4a} > 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} c = 0, \\ a < 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

【例 9】约定: 数 $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 叫做复数. 其中 $b=0$, $b \neq 0$, $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, $a + bi$ 依次是实数, 虚数, 纯虚数. 由 0, 1, 2, $\dots$, 9 十个数码可组成:

(1) 多少个不同的复数?

(2) 多少个不同的实数?

(3) 多少个不同的虚数?

(4) 多少个不同的纯虚数?

在 $a + bi$ 中, $b=0$ 时, $a + bi$ 是实数. $a + bi$ 何时是虚数、纯虚数? (3)(4) 不就解决了吗?

解 该题均由 $a + bi$ 的形式确定, 都分两步.

(1) a 、 b 均可取十个数码, 共有不同的复数 $N = 10 \times 10 = 100$ (个).

(2) a 可取十个数码, $b=0$, 共有不同的实数 $N = 10 \times 1 = 10$ (个).

(3) a 可取十个数码, $b \neq 0$, 共有不同的虚数 $N = 10 \times 9 = 90$ (个).

(4) $a=0$, $b \neq 0$, 共有不同的纯虚数 $N = 1 \times 9 = 9$ (个).

以上各小题由实部 a 和虚部 b 的可取值决定, a 、 b 各自独立确定, 两个步骤与先后顺序无关, 其中复数的个数为实数、虚数个数的和

【例 10】甲、乙两个正整数的最大公约数为 60, 则甲、乙两数的公约数共有多少个?

解 由 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, 甲、乙两数的公约数形如: $2^m, 3^n, 5^p$, 其中 $m \in \{0, 1, 2\}, n \in \{0, 1\}, p \in \{0, 1\}$, 所以有公约数 $N = 3 \times 2 \times 2 = 12$ (个).

点评 完成一个事件, “类”是独立的, “步”是其中必要步骤之一, 不是独立的.

分类的情况必相加, 分步的情况必相乘, 对此一定要深刻理解, 准确应用

【例 11】3 张 1 元币、4 张 1 角币、1 张 5 分币、2 张 2 分币, 可组成多少种不同的币值(一张不取, 即 0 元 0 角 0 分不计在内)?

解 分币可组成 0 分、2 分、4 分、5 分、7 分、9 分六种币值; 角币可组成 0 角、1 角、2 角、3 角、4 角五种币值; 元币可组成 0 元、1 元、2 元、3 元四种币值, 所以它们可组成 $4 \times 5 \times 6 - 1 = 119$ 种币值.

减去 1, 是去掉 0 元 0 角 0 分的情况

3. 分类计数加法原理与分步计数乘法原理

综合问题

【例 12】一个三层书架, 分别放置语文书 12 本, 数学书 14 本, 英语书 11 本.

- (1) 从中取出 1 本书, 共有多少种不同的取法?
 (2) 从中取出语文、数学、英语书各一本, 有多少种不同的取法?
 (3) 从中取出 2 本书, 且语文、数学、英语每种只能选一本, 有多少种不同的取法?

解 (1) 分三类, 共有不同取法 $N=12+14+11=37$ (种).

12 是取到语文书的情况

(2) 分一类三步, 共有不同取法 $N=12 \times 14 \times 11=1\,848$ (种).

各取 1 本, 这件事才算完成. 12, 14, 11 依次是取到语文、数学、英语书的情况

(3) 分三类, 每类分两步. 从语文、数学书中各选 1 本, 有 12×14 种不同的选法; 从语文、英语书中各选 1 本, 有 12×11 种不同的选法; 从数学、英语书中各选 1 本, 有 14×11 种不同的选法.

所以共有不同的选法

$$N=12 \times 14 + 12 \times 11 + 14 \times 11 = 454 \text{ (种)}.$$

点评 第 (3) 小题可用图 1-4 表示如下:

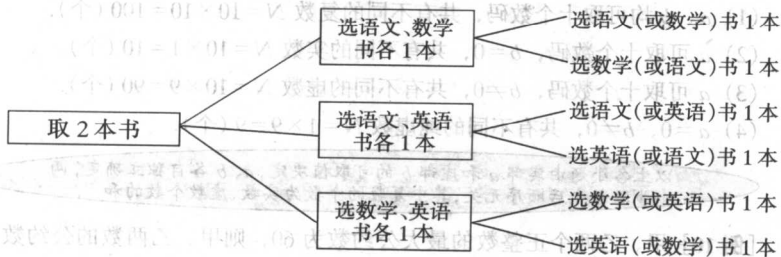


图 1-4

[例 13] 现有高一四个班学生 34 人, 其中一、二、三、四班各 7 人、8 人、9 人、10 人, 他们自愿组成数学课外小组.

- (1) 选其中一人作为负责人, 有多少种不同的选法?
 (2) 每班选一名组长, 有多少种不同的选法?
 (3) 推选二人作中心发言, 这二人需来自不同的班级, 有多少种不同的选法?

解 (1) 分四类: 第一类, 从一班学生中选 1 人, 有 7 种选法; 第二类, 从二班学生中选 1 人, 有 8 种选法; 第三类, 从三班学生中选 1 人, 有 9 种选法; 第四类, 从四班学生中选 1 人, 有 10 种选法.

所以共有不同的选法

$$N=7+8+9+10=34 \text{ (种)}.$$

(2) 分一类四步, 第一、二、三、四步分别从一、二、三、四班学生中选一人任组长.

所以共有不同的选法

$$N=7 \times 8 \times 9 \times 10=5\,040 \text{ (种)}$$

(3) 分六类, 每类又分两步. 从一、二班学生中各选 1 人, 有 7×8 种不同的选法; 从一、三班学生中各选 1 人, 有 7×9 种不同的选法; 从一、四班学生中各选 1 人, 有 7×10 种不同的选法; 从二、三班学生中各选 1 人, 有 8×9 种不同的选法; 从二、四班学生中各选 1 人, 有 8×10 种不同的选法; 从三、四班学生中各选 1 人, 有 9×10 种不同的选法.

所以共有不同的选法

$$N=7 \times 8 + 7 \times 9 + 7 \times 10 + 8 \times 9 + 8 \times 10 + 9 \times 10 = 431 \text{ (种)}$$

点评 第 (3) 小题可用图 1-5 表示如下:

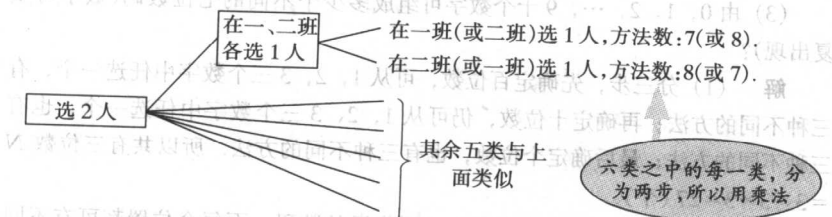


图 1-5

【例 14】一个口袋内装有 5 个小球, 另一个口袋内装有 4 个小球, 所有这些小球的颜色互不相同.

(1) 从两个口袋内任取一个小球, 有多少种不同的取法?

(2) 从两个口袋内各取一个小球, 有多少种不同的取法?

分析 欲完成从两个口袋内任取一个小球这件事, 可有两类办法: 或从第一个口袋内取, 或从第二个口袋内取, 都能完成这件事, 所以第 (1) 题可用分类计数原理来解. 欲完成从两个口袋内各取一个小球, 需分两个步骤: 第一步, 在第一个口袋内任取 1 个小球; 第二步, 在第二个口袋内任取 1 个小球, 两个步骤都完成了这件事就完成了, 因此第 (2) 题用分步计数乘法原理.

解 (1) 从两个口袋内任取 1 个小球, 有两类办法: 第一类办法是从第一个口袋内任取 1 个小球, 可以从 5 个小球中任取 1 个, 有 5 种方法; 第二类办法是从第二个口袋内取小球, 可以从 4 个小球中任取 1 个, 有 4 种方法.

根据分类计数加法原理, 得到不同的取法的种数是

$$N=5+4=9 \text{ (种)}$$

(2) 从两个口袋内各取 1 个小球, 可以分成两个步骤来完成: 第一步, 从第一个口袋内取 1 个小球, 有 5 种方法; 第二步, 第二个口袋内取 1 个小球, 有 4 种方法.