普通高等学校管理科学与工程类学科专业主干课程教材

运筹学

教育部高等学校管理科学与工程类学科教学指导委员会 组编
朱道立 徐庆 叶耀华 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等学校管理科学与工程类学科专业主干课程教材

运筹学

教育部高等学校管理科学与工程类学科教学指导委员会 组编
朱道立 徐 庆 叶耀华 主编

高等教育出版社
Higher Education Press

内容简介

按照教育部高教司2004年制定的全国普通高等学校管理科学与工程类本科生教学基本要求，由复旦大学长期从事运筹学教学和科研的教师集体编写了本书，本书内容紧密结合经济、管理类专业的特点。讲述了线性规划、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、马尔可夫决策、网络优化模型、排队论、库存论、博弈论的基本概念、模型和方法。各章后均附有习题，以帮助复习基本知识和检查学习效果。书中还附有4个国际上著名的运筹学运用成功例子，可以帮助读者了解运筹学实践。

本书可作为高等院校经济、管理类业本科生、研究生的教材，也可供其他有关专业的学生和工作者作为教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/朱道立，徐庆，叶耀华主编；教育部高等学校管理科学与工程类学科教学指导委员会组编. —北京：高等教育出版社，2006.4
ISBN 7-04-018490-7

Ⅰ. 运… Ⅱ. ①朱…②徐…③叶…④教… Ⅲ. 运筹学-高等学校-教材 Ⅳ. O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第020456号

策划编辑 童 宁 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波
责任绘图 宗小梅 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 胡晓琪
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010—58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800—810—0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010—58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2006年4月第1版
印　　张	24.25	**印　　次**	2006年4月第1次印刷
字　　数	450 000	**定　　价**	30.00元

物料号 18490-00

总 前 言

为适应我国经济社会发展需要，保证高等学校管理科学与工程类本科专业人才培养基本质量，我司委托高等学校管理科学与工程类学科教学指导委员会对管理科学与工程类四个本科专业：工程管理、工业工程、信息管理与信息系统、管理科学专业的教学内容和课程体系等问题进行系统研究，确定了上述四个专业的核心课程和专业主干课程，提出了这些课程的教学基本要求（经济学课程建议采用工商管理类的宏观经济学和微观经济学的教学基本要求），并编写相应教材。各门课程的教学基本要求及相应教材由高等教育出版社2004年秋季陆续出版，供各高等学校选用。

教育部高等教育司

2004年9月

前　言

自1938年英军在与纳粹德国作战中首次运用运筹学,这门现代科学已走过了近70年的发展历程。这个发展历程已经证实了,运筹学在企业管理、公共管理和工程管理等各种管理活动以及经济、金融和军事等方面,都有着广泛的应用;也正是这些应用,促进了运筹学在很多方面的发展。可以说,运筹学是一门面向实用的科学,它在不断地发展,以解决人们在管理实践中提出的新问题。到如今,运筹学已成为管理领域最重要的科学方法之一。管理人员可以利用运筹学方法制定目标选优的最佳方案,从而为他们作出最终决策提供科学依据。

根据教育部高教司2004年制定的全国普通高等学校管理科学与工程类本科生教学基本要求,运筹学课程是整个管理科学与工程类四个专业的核心课程,也是管理科学专业的主干课程。本编写小组受高等学校管理科学与工程类教学指导委员会委托,按照基本要求中制定的教学要点,编写了这本《运筹学》教材。本编写小组的成员都是具有20年以上教学经验的教师,也都一直做着运筹学和管理科学领域的理论和应用研究工作,对管理科学与工程专业的教学需求有较深入的理解,并力图把这些理解渗入到这本教材中去。

本教材共12章,每章都附有习题,并在书中提供了习题答案;每章也都提供了运用Excel求解相关模型的方法。为了便于多媒体教学,本教材附有一张光碟,内有课程讲义PPT文件和有关模型的Excel文件。编者也考虑了各章节的相对独立性,以便在使用这本教材时可按课时需要适当选讲。

本教材由朱道立教授任主编,他统筹和审核了全书,并编写了第11章;徐庆副教授编写了第1至7章、第9章和第12章;叶耀华副教授编写了第8章和第10章。在编写过程中,许多研究生作了辅助工作,编者在此一并表示感谢!

使用本教材的教师和学生们,编者对你们表示感谢,并请你们提供宝贵的意见!

编者
2005年12月1日
于复旦大学

目　录

第一章　绪论

§1.1　运筹学的产生和发展

在经济和管理工作中，我们经常会面临各种决策问题，包括各种计划的确定、控制的执行和决策的分析等. 如何进行科学的、合理的决策，特别是如何使决策的效率达到最优？这正是运筹学要解决的问题. 通过运用运筹学方法，对决策问题进行分析、建模和求解，这将为经济和管理中的决策提供有效的依据.

运筹学是一门实用性很强的方法科学，它包括适用于各种经济和管理决策问题的模型方法，如线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、运输问题、网络优化模型、动态规划、马尔可夫决策分析、排队论、存贮论和博弈论等.

1976 年美国运筹学会定义"运筹学是研究用科学方法来决定资源不充分的情况下如何最好地设计人—机系统，并使之最好地运行的一门学科". 现在运筹学已成为近代应用数学的一个分支，它将生产、管理等实际中出现的一些带有普遍性的运筹问题加以提炼，然后利用数学方法进行解决.

运筹学的思想在古代就已经产生了，如在中国战国时期，著名的"田忌赛马". 田忌赛马的故事就是在已有的条件下，经过筹划、安排，选择一个最好的方案. 再如，在敌我双方交战时，要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上，做出最优的对付敌人的方法，这就是所谓的"运筹帷幄之中，决胜千里之外".

运筹学主要研究经济活动和军事活动中能用数量来表达的有关策划、管理方面的问题. 随着客观实际的发展，运筹学的许多内容不但研究经济和军事活动，有些已经深入到我们的日常生活当中. 运筹学可以根据问题的要求，通过数学上的分析、运算，得出各种各样的结果，最后提出综合性的合理安排，以达到最好的效果.

运筹学的研究方法有：(1) 从现实生活中抽出本质的要素来构造数学模型，寻求一个跟决策者目标有关的解；(2) 探索求解的结构并导出系统的求解过程；(3) 从可行方案中寻求系统的最优解法.

运筹学作为一门用来解决实际问题的学科，在处理千差万别的各种问题中，一般有以下几个步骤：

1. 确定目标；
2. 制定方案；

3. 建立模型；

4. 制定求解方法.

随着科学技术和生产的发展，运筹学已渗入到很多领域里，并发挥了越来越重要的作用. 运筹学本身也在不断发展，现在运筹学包含数学规划（其中有线性规划、非线性规划、整数规划、参数规划、动态规划、目标规划等等）、图论、排队论、库存论、博弈论等等.

§1.2 运筹学的主要内容

一、数学规划

数学规划是研究计划管理工作中在给定条件下，按某一衡量指标来寻找最优方案. 它可以表示为在满足约束条件下，求极大极小值问题.

数学规划和古典的求极值问题有本质上的不同，古典方法只能处理具有简单表达式和简单约束条件的情况. 而现代的数学规划问题中的目标函数和约束条件都很复杂，而且要求给出某种精确度的数值解，因此算法的研究特别受到重视.

数学规划中最简单的问题是线性规划，即约束条件和目标函数都是线性函数的数学规划. 线性规划主要应用于企业规划和工农业的管理决策等方面，此外还应用于经济理论中. 它的基本概念已渗透到自然科学和社会科学的许多领域. 线性规划及其解法——单纯形法的出现，对运筹学的发展起了重大的推动作用. 单纯形法是最实用而又有效的算法. 随着计算机的出现和发展，使得一些大型复杂的实际问题的解决成为现实.

非线性规划是线性规划的进一步发展和继续. 许多实际问题如设计问题、经济平衡问题都属于非线性规划的范畴. 非线性规划扩大了数学规划的应用范围，同时也给数学工作者提出了许多理论问题，使数学中的一些理论问题如凸分析、数值分析等也得到了发展.

动态规划是与时间有关的规划问题，它是研究多阶段决策过程最优化问题，它在工程控制、技术物理和通讯的最佳控制问题中，已经成为经常使用的重要工具.

参数规划是系数或常数项中带有参数的规划问题，主要研究问题的解法：当参数在什么范围变化时问题有解以及参数的变化对最优解的影响.

二、排队论

排队论是运筹学的又一个分支，它也叫做随机服务系统理论. 它的研究目的

是要回答如何改进服务机构或组织被服务的对象，使得某种指标达到最优的问题. 比如一个港口应该有多少个码头，一个工厂应该有多少维修人员等.

排队论最初是在20世纪初由丹麦工程师爱尔朗关于电话交换机的效率研究开始的，在第二次世界大战中为了对飞机场跑道的容纳量进行估算，它得到了进一步的发展，其相应的学科更新论、可靠性理论等也都发展起来.

因为排队现象是一个随机现象，因此在研究排队现象的时候，主要采用研究随机现象的概率论作为主要工具. 此外，还有微分和微分方程. 排队论把它所要研究的对象形象的描述为顾客来到服务台前要求接待. 如果服务台已被其他顾客占用，那么就要排队. 另一方面，服务台也时而空闲、时而忙碌. 这就需要通过数学方法求得顾客的等待时间、排队长度等的概率分布.

排队论在日常生活中的应用是相当广泛的，比如水库水量的调节、生产流水线的安排，铁路调度、电网的设计等等.

三、库存论

库存论是一种研究物资最优存储及存储控制的理论. 物资存储是工业生产和经济运转的必然现象. 如果物资存储过多，则会占用大量仓储空间，增加保管费用，使物资过时报废从而造成损失；如果存储过少，则会因失去销售时机而减少利润，或因原料短缺而造成停产. 因而如何寻求一个恰当的采购、存储方案就成为库存论研究的对象.

四、图论

图论是研究由结点和边所组成的图形的数学理论和方法. 图是网络分析的基础，根据研究的具体网络对象，赋予图中各边某个具体的参数，如时间、流量、距离等，规定图中各节点代表具体网络中任何一种流动的起点、中转点或终点，然后利用图论方法来研究各类网络结构和流量的优化分析.

五、博弈论

博弈论是使用严谨的数学模型研究冲突对抗条件下最优决策问题的理论. 为建立冲突对抗条件下决策的数学模型，必须数学化地描述冲突的参与者所有可能的行为方式及其行为结果，因此它被视为运筹学的一个分支. 博弈论的发展也只有几十年的历史. 系统地创建这门学科的数学家，现在一般公认为是美籍匈牙利数学家冯·诺依曼(1903—1957).

博弈论最初是运用数学方法研究有利害冲突的双方在竞争性的活动中是否存在自己制胜对方的最优策略以及如何找出这些策略的问题. 在这些问题中，把双方的收益用数量来描述并找出双方最优策略. 由于博弈论是研究双方冲突、制

胜对策的问题,所以这门学科在军事方面有着十分重要的应用. 近年来,随着人工智能研究的进一步发展对博弈论提出了更多新的要求. 博弈论在市场竞争、经济管理等领域中已得到了广泛的应用.

§1.3 运筹学在管理中的应用

对于大量的、复杂的现实管理决策问题,只依靠人的经验进行定性分析的决策方法已不能适应现代社会的要求. 因而我们需要借助科学的定量分析方法,把定性分析建立在科学的定量分析的基础上. 运筹学提供的大量的定量分析方法,为我们进行科学的决策分析提供了有效的工具. 运筹学应用领域非常广阔,目前它已渗透到诸如服务、库存、搜索、人口、对抗、控制、时间表、资源分配、厂址定位、能源、设计、生产、可靠性等各个方面.

运筹学在经济管理中的应用主要有:

(1) 在工程设计和管理决策方面. 例如,如何使完成工程任务的时间最少,运输的费用最省等等;

(2) 在生产计划与管理方面. 例如如何确定生产、存贮和劳动力的分配以适应波动多变的市场需求计划;

(3) 在市场营销管理方面,运用运筹学进行定量分析,确定最优方案,例如在广告预算和媒体的选择、竞争性定价、新产品开发、销售等计划的制定等;

(4) 在库存管理方面,主要应用于多种物资库存量的管理,确定某些设备的能力或容量,如停车场的大小、新增发电设备的容量大小、合理的水库容量等. 目前国际新动向是:将库存理论与计算机的物资管理信息系统相结合,建立管理信息系统;

(5) 在会计与财务分析及管理方面. 例如,在设计预算、贷款、成本分析、定价、投资、证券管理、现金管理等方面的问题;

(6) 在人力资源管理方面. 例如利用各种指派问题,进行人员的需求估计,人才的开发和人员的分配等;

(7) 在物流管理与交通运输问题方面. 例如对涉及空运、水运、公路运输、铁路运输、管道运输等问题以及空运飞行航班和飞行机组人员服务时间、安排船舶航运计划、港口装卸设备的配置和船到港后的运行安排等问题.

另外对设备维修、更新和可靠性、项目选择和评价等方面都有广泛的应用.

第二章　线性规划和单纯形法

教学要求：掌握线性规划的基本建模方法、单纯形法的基本原理，会在不同条件下运用单纯形法求解线性规划问题，了解线性规划在经济和管理中的基本应用和方法.

线性规划是运筹学中理论最完善、方法最成熟，并具有广泛应用的一个分支.许多实际问题都可以用线性规划问题来表示，如能源供应和能源价格变化怎样影响经济过程的问题；生产计划的安排；车辆调度问题等.早在20世纪30年代，苏联数学家L. V. Kantorovich(康托洛维奇)首先提出了线性规划的模型，之后人们对线性规划问题的求解进行了广泛系统的研究，1947年美国数学家G. B. Dantzig提出的求解线性规划的单纯形算法是应用最广泛、取得经济效益最大的一种方法.单纯形方法的提出标志着线性规划在理论和方法上日臻完善.近几十年来，线性规划取得了重大的进展，Karmarkar内点法的提出和计算机技术日新月异的发展，使得有成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题能快速地求解.这为线性规划在经济管理等领域的应用提供了极其有利的条件.线性规划的理论和方法已经成为现代管理的重要手段之一.

线性规划主要研究两类问题：一是在现有资源有限的条件下，如何合理地安排，才能以最少的人力、物力资源去完成任务.二是在任务确定后，如何计划、安排，才能在完成任务的前提下，使得现有资源的消耗最低.这两类问题本质都是一样的，即在一组约束条件下，使某一目标达到最优.

§2.1　线性规划实例与模型

一、应用实例

许多经济、管理中的问题都能用线性规划模型来表示，如在企业的生产计划问题中，为了制造同种产品，必须利用各种生产要素：如原材料、劳动力、运输等等，同时又有多种进行生产的工艺模式，在这些模式中，生产要素在制造产品的单位时间内的消耗量是不同的.生产要素的消耗量和产品的产出量依赖于以某种工艺模式生产时所花费的时间.如何在每种生产要素的消耗量都有限制的条件下，来适当分配各种生产模式所花的时间，使得产品的产出量最大.下面就是一个具体的例子.

例 2.1 有一生产球袋的公司，通过市场调研，公司决定开发生产高中价位的新型球袋．某分销商决定买进该公司 3 个月内的全部产品．该新型球袋的生产需要经过对原材料的剪裁、缝合、定型、检验和包装四个过程．

通过对每一生产过程的分析，得出以下结论，生产一个中档球袋需要用：7/10 小时完成剪裁，1/2 小时完成缝合、1 小时完成定型、1/10 小时检验和包装．生产高档球袋则需要用：1 小时完成剪裁、5/6 小时完成缝合、2/3 小时完成定型、1/4 小时检验和包装．由于该公司各生产部门的生产能力有限．3 个月内每个部门的最大工作时间分别是：剪裁部门 630 小时、缝合部门 600 小时、定型部门 708 小时、检验和包装部门 135 小时．

通过市场调研部门和会计部门的调查核算得出以下结论，生产一个中档球袋的利润是 10 元，生产一个高档球袋的利润是 9 元．公司应各生产多少中档和高档球袋才能使公司的利润获得最大．

二、线性规划模型的建立

在例 2.1 中，使产品的总利润最大是公司追求的目标．由于各生产部门的生产能力有限，要实现公司的目标，还要受到剪裁、缝合、定型、检验和包装等四个部门所能承受的最大工作时间的限制．公司要决定的是生产中档和高档球袋的产量，即决策变量．

为了建立描述上述问题的数学模型，首先假设两个决策变量：

x_1：表示中档球袋的产量；

x_2：表示高档球袋的产量；

根据该问题的具体情况我们有：

公司的追求目标：总利润最大，即 $10x_1+9x_2$ 达到最大；

公司的生产能力受下列条件约束：

约束条件 1：剪裁时间 ≤ 公司剪裁部门的最大工作时间，即 $7/10x_1+x_2\leqslant 630$；

约束条件 2：缝合时间 ≤ 公司缝合部门的最大工作时间，即 $1/2x_1+5/6x_2\leqslant 600$；

约束条件 3：定型时间 ≤ 公司定型部门的最大工作时间，即 $x_1+2/3x_2\leqslant 708$；

约束条件 4：检验包装时间 ≤ 公司检验包装部门的最大工作时间，即 $1/10x_1+1/4x_2\leqslant 135$.

同时产量不能是负的，即要求 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$．由此可得到如下的数学模型：

$$\max\ 10x_1+9x_2,$$

$$\text{s.t.}\ 7/10x_1+x_2\leqslant 630,$$

$$
\begin{aligned}
&1/2x_1+5/6x_2\leqslant 600,\\
&x_1+2/3x_2\leqslant 708,\\
&1/10x_1+1/4x_2\leqslant 135,\\
&x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

这是一个规划模型,由于该模型的目标函数和约束条件都是线性函数,所以该数学模型称为线性规划模型.

从上面的例子可以看出,该模型具有以下特点:

(1) 有一组决策变量.这些决策变量通常是非负的;

(2) 存在一组线性约束,通常称为约束条件,这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式表示;

(3) 有一个期望达到的目标,即目标函数,要求实现目标函数的最大化或最小化,并且这个目标函数可以表示为一组未知变量(决策变量)的线性函数.

由此我们有一般的线性规划模型:

$$
\max(\text{或}\ \min)z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\geqslant\text{或}=)b_1, & \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\geqslant\text{或}=)b_2, & (2.2)\\
\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots & \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\geqslant\text{或}=)b_m, & \\
x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0. & (2.3)
\end{cases}
$$

三、线性规划模型的标准形式

由于线性规划有各种不同的形式,为了研究问题的方便,我们规定如下形式的线性规划模型是标准形式的线性规划

$$
\max\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, & \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 & (2.4)\\
\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots & \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, & \\
\qquad x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0. & (2.5)
\end{cases}
$$

(2.4)和(2.5)的缩写形式是:

$$
\max\ z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\ ,
$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i(i=1,2,\cdots,m)\ , & (2.6)\\ x_j \geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n). & (2.7)\end{cases}$$

令 $$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n),\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},$$

则标准形式的矩阵向量形式是:

$$\max\ \boldsymbol{cx},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, & (2.8)\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}, & (2.9)\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为约束方程组的系数矩阵;$\boldsymbol{b}$ 是限定向量,即可利用资源的数量,通常 $\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$;$\boldsymbol{c}$ 是价值向量;$\boldsymbol{x}$ 是未知数向量或决策向量.

对于具有小于等于形式的不等式约束的线性规划问题可通过引入松弛变量将其化为标准形式. 而对大于等于形式的不等式约束的线性规划问题则可通过引入松弛变量和人工变量将其化为标准形式,即减去松弛变量,加上人工变量. 如果决策变量 x_j 没有非负的要求,即 x_j 可取任何值时,可令 $x_j=x_j'-x_j''$,其中 $x_j'\geqslant 0,x_j''\geqslant 0$,然后再转化为标准形式. 各种情况的转化见表 2-1:

表 2-1

	原 问 题	标准化方法
目标函数	max $f(x)$	max $f(x)$
	min $f(x)$	max $-f(x)$
约束条件	对某个 i, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$	引入松弛变量 x_s 和人工变量 x_a, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_s + x_a = b_i$
	对某个 i, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$	引入松弛变量 x_s, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_s = b_i$
	对某个 i, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	不变
	对某个 $i,b_i<0$	第 i 约束两边乘以 -1
变量	对某个 $i,x_i\geqslant 0$	不变
	对某个 $i,x_i\leqslant 0$	令 $x_i=-x_i'$,其中 $x_i'\geqslant 0$
	对某个 i,x_i 是任意的	令 $x_i=x_i'-x_i''$,其中 $x_i',x_i''\geqslant 0$

下面给出将非标准形式的线性规划问题转化为标准形式的例子.

例 2.2 将下面的线性规划化为标准的线性规划:

$$\max\ 10x_1+9x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}7/10x_1+\quad x_2\leqslant 630,\\ 1/2x_1+5/6x_2\leqslant 600,\\ 1/10x_1+1/4x_2\leqslant 135,\\ x_1+2/3x_2\geqslant 708,\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0.\end{cases}$$

解 首先对每个不等式约束条件分别引入松弛变量 x_3,x_4,x_5,x_6 和对第四约束条件引入人工变量 x_7. 则可化为如下的标准形式:

$$\max\ 10x_1+9x_2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}7/10\,x_1+\quad x_2+x_3 & =630,\\ 1/2\quad x_1+5/6x_2\quad +x_4 & =600,\\ 1/10\,x_1+1/4x_2\qquad +x_5 & =135,\\ \qquad x_1+2/3x_2\qquad -x_6+x_7 & =708,\\ x_1,x_2,x_3,\cdots,x_7\geqslant 0.\end{cases}$$

例 2.3 将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\min\ x_1+5x_2-8x_3-x_4,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-3x_2+\ x_3+\ x_4\leqslant 20,\\ x_1+2x_2+3x_3-\ x_4\geqslant 30,\\ \qquad 2x_2+2x_3+3x_4\geqslant -50,\\ x_1,x_3,x_4\geqslant 0,x_2\ \text{取值无约束}.\end{cases}$$

解 首先将最小化化为最大化,即 $\max -x_1-5x_2+8x_3+x_4$,其次对第三个约束条件两边乘以 -1,得 $-2x_2-2x_3-3x_4\leqslant 50$,然后对每个不等式约束条件分别引入松弛变量 x_5,x_6,x_7 和对第二个约束条件引入人工变量 x_8. 由于 x_2 没有非负限制,引入两个非负变量 x_2',x_2'',令 $x_2=x_2'-x_2''$,则可化为如下的标准形式:

$$\max\ -x_1-5x_2'+5x_2''+8x_3+x_4,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-3(x_2'-x_2'')+\ x_3+\ x_4+x_5 & =20,\\ x_1+2(x_2'-x_2'')+3x_3\ -x_4\qquad -x_6\qquad +x_8 & =30,\\ \quad -2(x_2'-x_2'')-2x_3\ -3x_4\qquad +x_7 & =50,\\ x_1,x_2',x_2'',x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\geqslant 0.\end{cases}$$

注:松弛变量在实际问题中表示未使用的资源或能力,这种未被使用的资源或能力对利润没有贡献,因此在目标函数中其系数为零. 这种未被使用的资源对企业来说是可以出售的. 人工变量是超过某一最低需求的量.