



21世纪高等院校教材

离散数学

内蒙古自治区计算机教材编委会 组编

主 编 包那

内蒙古大学出版社

●21 世纪高等院校教材

离 散 数 学

内蒙古自治区计算机教材编委会 组编

主 编	包 那		
副主编	钱有梁	宋世军	
编 委	王 强	包 那	
	宋世军	杜 宏	钱有梁

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/包那主编

—呼和浩特:内蒙古大学出版社,2002 7

ISBN 7-81074-368-6

I 离… II 包… III 离散数学—高等学校—教材 IV 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056079 号

离 散 数 学

包那 主编

内蒙古大学出版社出版发行

内蒙古自治区新华书店经销

内蒙古政府机关印刷厂印制

开本:850×1168/32 印张:10 125 字数:193 千

2002 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

印数:1—1500 册

ISBN 7-81074-368-6/O·34

定价:14.00 元

内 容 提 要

离散数学是计算机专业和应用数学专业的重要基础课。本书讲述了数理逻辑、集合论、代数结构、图论、基本计数分析和形式语言与自动机等六部分内容,其中基本计数分析、形式语言与自动机这两部分内容可作为选讲。书中概念论述清楚,力求写得深入浅出、通俗易懂,配备足够的基本例题,重视了基本知识的掌握和分析解决问题能力的提高。

本书可作为高等院校计算机、电子工程、自动控制、应用数学、信息科学等专业教材。同时还可作为从事计算机软件、硬件研究开发、数学模型开发应用人员参考用书。

内蒙古自治区计算机教材编委会

主 任 李东升 梁希侠(常务)

副主任 满 达 叶新铭 包 那 裴喜春 杨国林

委 员 丁彦武 王润文 乌格德 玉 柱 叶新铭

包 那 李东升 李东魁 李燕华 刘利民

刘 实 寿永熙 杨国林 杨建省 赵俊岚

哈斯额尔敦德尼 高光来 徐宝清 唐建平

梁希侠 斯日古楞 满 达 裴喜春

嘎日迪 薛河儒

序

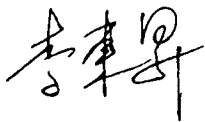
内蒙古自治区的高等教育事业起步于 20 世纪 50 年代初。经过近 50 年的发展,我区的高等教育无论从规模上,还是质量上都取得了长足的发展。特别是近些年来,全区高等院校的招生数量成倍增长,部分院校的合并使得一些高校的办学规模迅速壮大,形成了几所万人大学。与此同时,各高校对各自的专业及课程设置都做了较大的调整,以适应当今日益发展变化的高等教育事业。面向 21 世纪,在科学技术日新月异,社会对人才的知识结构、层次要求越来越高的新形势下,我们的高等教育的教学水平,特别是教材建设都应有一个更新更高的要求。

回顾 50 年来的发展,虽然我区高等教育的教学科研水平有了较大的提高,但与之相应的教材建设的现状还不尽如人意,绝大多数主干课程的教材还沿用一些传统教材,有些甚至是 20 世纪七八十年代的版本。有些院校的教材选用则有一定的随机性,在几种版本的教材之中换来换去。其间,虽然部分院校也组织力量编写了一些基础课及专业课教材,但大都是各成体系,缺乏院校间的协作与交流,形不成规模,质量亦无法保证,常常滞后于学科的发展与课程的变化。这都与我区高等教育的发展极不协调。诚然,区外部分地区高校的教学科研水平比我区要高,一些教材的质量好,我们可以直接利用,但这并不能成为我们不搞教材建设的理由。好的教材还需要相应的教育资源条件与之相对应才能取得良好的教学效果,从而达到促进教学质量提高之目的。应当承认,由于经济发展的相对落后,我区高校所招学生的基础和学校的教学条件比起全国重点名牌大学相对要差一些。因而,我们高校的教材也应从实际出发,结合自己学校和学生的特点,逐步探索、建立一套

适合自治区教育资源条件的教材体系,促进自治区高校教学科研水平的提高,多出人才,出好人才。

值得欣喜的是,随着自治区教育科学水平的提高,我区高校教育领域的一些有识之士逐渐认识到,面向 21 世纪,未来高校之间的竞争就是学校的产品——学生质量的竞争。要想培养出高水平、高素质的学生,使我区的高校在这种竞争中立于不败之地,除各高校应努力提高自身的教学组织管理水平、提高教师的素质外,还应积极主动地加强与区内外高校的协作、交流,取长补短,走联合发展的道路,使我区高等教育的整体水平能够在较短的时间内得到提高。为此,在有利于规范高校教材体系,促进高校教育质量的提高,加强各高校教学科研人员之间的协作与交流的原则下,由自治区教育厅牵头,内蒙古大学出版社组办、资助,联合全区高等院校的有关专家、学者共同组建成立一些相关专业的教材编委会,以求编写适合我区高等教育特点的教材,逐步建立、完善自治区高等教育的教学、教材体系,并开展一些与教学相关的科研工作。我们希望,通过教材编委会这种工作模式,建设一批高质量的教材,带出一支高水平的师资队伍,培养出大批高素质的人才。

我坚信,在自治区教育厅的指导下,在编委会各位专家、学者的辛勤工作下,在各院校的相互理解、相互协作、相互支持下,我们一定能够克服发展过程中的困难,逐步推出一批高质量、高水平的教材,为推进内蒙古自治区高等教育事业做出重要的贡献。



2002 年 3 月 19 日

前 言

离散数学是随着计算机科学的发展而逐步建立的,是 20 世纪 70 年代初期形成的新兴学科。它主要研究有限个或可数无限个离散量的结构和相互关系。正因为如此,它充分描述了计算机科学的离散性特点,从计算机科学理论、系统结构、软件到应用,无一不以离散数学作为理论基础和数学工具。它是计算机科学基础理论的主干课程,是现代数学的一个重要分支。

近几年,讲授离散数学课程的学校逐渐增多,不同地区、不同学校、不同学科对这一门课程的要求也有着很大的差别。我们为了适应这种需求的增加和不同要求而编写了这本离散数学教材。

本书内容分为基本内容和选讲内容两部分,共 11 章。基本内容包括数理逻辑、集合论、代数结构和图论等四方面;选讲部分包括基本计数分析、形式语言与有限自动机两个内容,这一部分均以星号“*”标记。基本内容约需 96 学时,选讲内容约需 24 学时。本书编写时力求严谨,推演时务求详尽,阐述基本概念基本知识时尽量通俗易懂,并用例子予以说明。每章后都安排了习题,习题按各节内容顺序编排,绝大部分都是基本习题。

本教材由包那同志起草大纲,经各学校讨论最终确定,并编写第 10 章和承担了全书审定工作;钱有梁同志编写代数结构部分;宋世军同志编写集合论部分;王强同志编写数理逻辑、形式语言与有限自动机部分;杜宏同志编写图论部分。书中绝大部分图由内蒙古财经学院斯勤夫和内蒙古大学出版社呼和同志绘制,我们对他们的帮助表示感谢。

由于我们水平有限,书中缺点和不足之处在所难免,我们恳切地欢迎读者的批评与指正。

包 那

2002 年 6 月 12 日

目 录

第 1 章 命题逻辑	(1)
§ 1 1 命题及联结词	(1)
§ 1 2 命题公式及真值表	(8)
§ 1 3 等值演算	(12)
§ 1 4 全功能联结词集	(18)
§ 1 5 对偶与范式	(24)
§ 1 6 命题逻辑的推理理论	(35)
习题 1	(43)
第 2 章 谓词逻辑	(51)
§ 2 1 谓词逻辑的基本概念	(52)
§ 2 2 谓词公式	(57)
§ 2 3 等值式和前束范式	(64)
§ 2 4 谓词逻辑的推理理论	(69)
习题 2	(75)
第 3 章 集合的基本概念和运算	(82)
§ 3 1 集合的基本概念	(82)
§ 3 2 集合的运算	(85)
§ 3 3 集合中元素的计数	(90)
习题 3	(95)
第 4 章 二元关系和函数	(98)
§ 4 1 集合的笛卡尔积与二元关系	(98)
§ 4 2 关系的运算	(104)
§ 4 3 关系的性质	(110)
§ 4 4 关系的闭包	(114)

§ 4 5	等价关系和偏序关系	(116)
§ 4 6	函数的定义和性质	(123)
§ 4 7	函数的复合和反函数	(127)
习题 4		(130)
第 5 章	代数系统	(135)
§ 5 1	二元运算及其性质	(135)
§ 5 2	代数系统	(144)
§ 5 3	同态与同构	(147)
§ 5.4	同余关系和商代数	(153)
习题 5		(157)
第 6 章	几个典型的代数系统	(163)
§ 6 1	半群与群	(163)
§ 6 2	环与域	(171)
§ 6 3	格与布尔代数	(174)
习题 6		(183)
第 7 章	图的基本概念	(188)
§ 7 1	无向图及有向图	(188)
§ 7 2	通路、回路、图的连通性	(195)
§ 7 3	图的矩阵表示	(199)
§ 7 4	最短路径与关键路径	(207)
习题 7		(211)
第 8 章	一些特殊的图	(216)
§ 8 1	二部图	(216)
§ 8 2	欧拉图	(219)
§ 8 3	哈密尔顿图	(222)
§ 8 4	平面图	(224)
习题 8		(230)
第 9 章	树	(234)
§ 9 1	无向树及生成树	(234)
§ 9 2	根树及其应用	(237)

习题 9	(243)
第 10 章* 基本计数分析	(245)
§ 10.1 加法法则和乘法法则	(245)
§ 10.2 基本排列组合的计数方法	(246)
§ 10.3 分配数	(256)
§ 10.4 生成函数	(258)
§ 10.5 分拆数	(263)
习题 10	(269)
第 11 章* 形式语言和自动机	(274)
§ 11.1 形式语言和形式文法	(274)
§ 11.2 形式文法的分类	(281)
§ 11.3 有限自动机	(289)
§ 11.4 图灵机	(297)
习题 11	(305)

第 1 章 命题逻辑

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学,具有十分悠久的历史,在两千多年前由古希腊哲学家亚里士多德创立.

逻辑学分为辩证逻辑与形式逻辑两种,前者研究反映客观世界辩证发展过程的人类思维的形态,而后者主要是对思维的形式结构和规律进行研究的类似于语法的一门工具性学科.思维的形式结构包括概念、判断和推理以及它们之间的联系,其中概念是思维的基本单位,它是反映事物本质属性的思维形式;通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答,这就是判断;由一个或几个判断推出另一判断的思维形式,就是推理.

数理逻辑是用数学的方法研究形式逻辑中推理规律的科学,这里所说的数学方法就是建立一套表意符号体系,对具体事物进行抽象的形式研究的方法.因此,数理逻辑又称符号逻辑.数理逻辑是由德国数学家、哲学家莱布尼兹(G. W. Leibnitz)于 17 世纪中叶创立的

数理逻辑是现代数学的重要基础,在计算机科学中发挥着重要的作用.在开关理论、计算机的逻辑设计、程序设计语言的形式语义学、人工智能等许多方面都应用到了数理逻辑的概念、方法和理论.本书只介绍命题逻辑和一阶谓词逻辑.

§ 1.1 命题及联结词

所谓**命题**,是指能够判断真假的陈述句.这种陈述句所表示的判断只有两种情况,一种是正确的判断,一种是错误的判断.当一个命题所表示的判断为真时,称它的**真值**为真,用“1”表示;当一个

命题所表示的判断为假时,称它的真值为假,用“0”表示.

例 1 试判断下列语句是否为命题.

- (1) 中国是一个国家.
- (2) 空气是白色的.
- (3) 禁止喧哗!
- (4) 今天是星期几?
- (5) 公园里的花真美啊!
- (6) $1 + 1 = 10$.
- (7) 21 世纪将会有人居住在太空.
- (8) 地球外的星球上也有生命.
- (9) $x > 0$.
- (10) 本句是假命题.

解 (1)是命题,它的真值为真,称为真命题;(2)也是命题,它的真值为假,称为假命题;(3)、(4)和(5)不是命题,因为它们分别是祈使句、疑问句和感叹句;(6)在二进制中为真,在十进制中为假,故需根据上下文才能确定真值,是命题;对于(7),现在还不清楚是真是假,但到了 22 世纪就一定会清楚,所以(7)也是命题;(8)也是命题,虽然我们目前还不知道它的真值,但它的真值是唯一的,并不因为我们是否知道而发生变化;(9)不是命题,当 $x = 1$ 时, $x > 0$ 正确,当 $x = -1$ 时, $x > 0$ 不正确,所以(9)的真值不确定;(10)也不是命题,当它是假命题时,它的值为真,当它不是假命题时,它的值为假,这是一句悖论.

从例 1 可以看出,判断一个句子是否为命题,首先要看它是否为陈述句,然后再看它是否具有唯一的真值.所以,命题又称为具有唯一真值的陈述句.

例 1 中的命题都是简单句,称这种命题为**简单命题**或**原子命题**.今后我们用小写英文字母 $p, q, r \cdots$ 或带下标的小写英文字母 $p_i, q_i, r_i \cdots$ 来表示简单命题.例如:

p : 北京是中国的首都.

q : 1 大于 2.

由于简单命题的真值是确定的, 所以简单命题又称为**命题常项**. 例如上面的 p, q 都是命题常项, 其中 p 的值为 1, q 的值为 0.

例 1 中的 (9) 不是命题, 但当 x 的值确定之后, 它的真值也就定下来了, 这种真值可以变化的简单陈述句称为**命题变项**. 一般也用 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$ 表示命题变项.

事实上, 数理逻辑这门学科并不关心命题的具体含义, 而仅关心命题的取值. 也就是说, 在数理逻辑中只讨论抽象的命题——一个取真值 1 或 0 的命题变项. 通常用 1 或 0 分别表示一个抽象的真命题和抽象的假命题.

命题可以分为两类, 一类是简单命题, 一类是**复合命题**.

所谓复合命题是指由简单命题用联结词联结而成的命题. 联结词是逻辑联结词或命题联结词的简称, 它是自然语言中连词的逻辑抽象. 在自然语言中, 常常使用“或”, “与”, “但是”等一些连接词, 对于这种连接词的使用, 一般没有很严格的定义, 因此有时显得不很精确, 可能会出现二义性, 这是数理逻辑所不允许的. 同时为了便于书写和进行推演, 必须对联结词作出明确规定并符号化. 常用联结词有以下 5 种.

(1) **否定联结词**—— $\neg$

设 p 是一个命题, “ p 的否定”是一个复合命题, 记作 $\neg p$. 称 $\neg p$ 为命题 p 的否定式. $\neg p$ 读作“非 p ”.

表 1 1

p	$\neg p$
0	1
1	0

复合命题 $\neg p$ 的值由命题 p 的真值来确定. 若 p 为 1, 则 $\neg p$ 为 0; 若 p 为 0, 则 $\neg p$ 为 1. $\neg p$ 的取值可列表如下:

联结词 $\neg$ 是自然语言中的“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象. 例如:

p : 雪是白的. 真值为 1

$\neg p$: 雪不是白的 真值为 0

注意,这里不要把“雪是黑的”符号化为 $\neg p$,因为它不是复合命题,只是一个简单命题.

(2)合取联结词—— $\wedge$

设 p 和 q 是两个命题,“ p 并且 q ”是一个复合命题,记作 $p \wedge q$.称 $p \wedge q$ 为 p 与 q 的合取式. $p \wedge q$ 读作“ p 且 q ”.

复合命题 $p \wedge q$ 的值由 p 、 q 的真值来确定. $p \wedge q$ 为 1 当且仅当 p 和 q 同时为 1. $p \wedge q$ 的取值可列表如下:

表 1 2

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

联结词 $\wedge$ 是自然语言中的“并且”,“既……又……”,“不仅……而且……”,“虽然……但是……”等的逻辑抽象.例如:

p : 张三是百米冠军.

q : 张三是跳远冠军.

$p \wedge q$: 张三既是百米冠军又是跳远冠军.

类似地,“张三不仅是百米冠军,而且是跳远冠军”,也可以符号化为 $p \wedge q$ 又如:

p : 张三是百米冠军

q : 今天下雨

$p \wedge q$: 张三是百米冠军并且今天下雨.

在自然语言中,这一命题是没有意义的,因为 p 与 q 没有内在联系,但在数理逻辑中 $p \wedge q$ 是一个新命题,当 p 、 q 的真值确定之后, $p \wedge q$ 的真值也就确定了.

注意,“张三与李四是同学”不能符号化为 $p \wedge q$,因为这是一

个简单命题,说的是张三与李四的关系,不是复合命题.

(3)析取联结词—— $\vee$

设 p 和 q 是两个命题,“ p 或者 q ”是一个复合命题,记作 $p \vee q$ 称 $p \vee q$ 为 p 与 q 的析取式. $p \vee q$ 读作“ p 或 q ”.

复合命题 $p \vee q$ 的值由 p 、 q 的真值来确定 $p \vee q$ 为 0 当且仅当 p 和 q 同时为 0. $p \vee q$ 的取值可列表如下:

表 1 3

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

联结词 $\vee$ 是自然语言中的“或”,“或者”的逻辑抽象.例如:

p : 今天考离散数学.

q : 今天考英语.

$p \vee q$: 今天考离散数学或英语.

注意,在自然语言中的“或”具有二义性,有时表示的是可兼或(与联结词 $\vee$ 相同),有时表示的是不可兼或(即排斥或).例如,“张三正在睡觉或学习.”不能符号化为 $p \vee q$ 的形式.但可借助联结词 $\neg$, $\wedge$, $\vee$ 共同来表示这种不可兼或.可符号化为 $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ 、 $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ 等形式.

(4)蕴涵联结词—— $\rightarrow$

设 p 和 q 是两个命题,“如果 p ,那么 q ”是一个复合命题,记作 $p \rightarrow q$.称 $p \rightarrow q$ 为 p 与 q 的蕴涵式,把 p 和 q 分别称为 $p \rightarrow q$ 的前件和后件,或者前提和结论. $p \rightarrow q$ 读作“若 p 则 q ”或“ p 蕴涵 q ”.

复合命题 $p \rightarrow q$ 的值由 p 、 q 的真值来确定. $p \rightarrow q$ 为 0 当且仅当 p 为 1 且 q 为 0 $p \rightarrow q$ 的取值可列表如下:

表 1.4

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

联结词 $\rightarrow$ 是自然语言中的“如果……那么……”,“只要……就……”等的逻辑抽象. $p \rightarrow q$ 表示的基本逻辑关系是: p 是 q 的充分条件,或 q 是 p 的必要条件.

例2 将下列命题符号化.

- (1) 只要天气好,我就去公园.
- (2) 只有天气好,我才去公园.
- (3) 如果雪是黑的,那么太阳从西方升起.
- (4) 如果雪是黑的,那么太阳从东方升起.
- (5) 如果雪是白的,那么太阳从西方升起.
- (6) 如果雪是白的,那么太阳从东方升起.

解 (1)设 p :天气好, q :我去公园,由于 p 是 q 的充分条件,故可符号化为 $p \rightarrow q$.

(2)假设同(1),由于 p 是 q 的必要条件,故可符号化为 $q \rightarrow p$.

在(3)~(6)中,设 p :雪是黑的, q :太阳从西方升起, r :雪是白的, s :太阳从东方升起,则(3),(4),(5),(6)可分别符号化为 $p \rightarrow q$, $p \rightarrow s$, $r \rightarrow q$, $r \rightarrow s$.在自然语言中,这些蕴涵式的前件与后件之间并无内在的联系,但在数理逻辑中,它们的真值分别为 1, 1, 0, 1.

注意,在自然语言中,对“如果……那么……”这样的语句,当前提为假时,结论不管真假,这个语句的意义往往无法判断.而在数理逻辑中,规定为“善意的推定”,即前提为假时, $p \rightarrow q$ 的真值都取为真.