新世纪高等院校精品教辅

概率统计一本通

周明华 唐 明 左文新 李素兰 编著

浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教辅

概率统计一本通

周明华 唐 明
左文新 李素兰 编著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计一本通 / 周明华等编著．—杭州：浙江大学出版社，2005.12
ISBN 7-308-04469-6

Ⅰ．概... Ⅱ．周... Ⅲ．①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料
Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 110107 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 徐素君
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭新印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 9.5
字　　数 215 千
版 印 次 2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04469-6/O·332
定　　价 13.00 元

前 言

概率统计是一门新兴的古老学科。说它古老,是因为它源远流长,有深厚的文化积淀和独特的思维特征;说它新兴,是因为随着现代数学和计算技术的发展,它焕发出了新的夺目光彩和青春活力,在当今科学技术和社会生活的众多领域得到了越来越广泛的应用。

因此,要想学好概率统计,一方面必须理解它的基本概念和思维特征,另一方面也必须掌握用它来分析推断具体现象和事件的方法。如果只关注它的计算公式和典型例题,而缺乏对基本概念和思维特征的把握,就只会照猫画虎,不可能触类旁通,举一反三。同样地,即便是把概念和公式背得滚瓜烂熟,如果不会对具体问题作具体分析,那也只能是纸上谈兵,面对诸多实际问题时却束手无策。

为了帮助同学们能把这门课尽量学得好一些,既满足后续课程的需要,也为进一步深造打好基础,我们几位教师积多年教学的切身体会和经验,精心编写了这本学习指导书。

我们编写本书的配套教材,是目前在全国多数大专院校所广泛采用的《概率论与数理统计教程》(沈恒范编著,第四版),在章节安排和概念定义、基本公式和表达形式等方面均与其一致。每一章的体例包含“学习目的和基本要求”、“基本内容与学习重点”、“典型例题解析”、“知识网络图”、“本章自测题”(并附自测题简答)等几个部分。其中:

“学习目的和基本要求”部分,不但根据大纲要求列出了本章的主要学习内容,而且用不同的表述用语说明了对各部分内容的不同要求,以利于同学们分别轻重缓急来配置自己的学习精力。

“基本内容与学习重点”部分,对本章的基本内容作了简要而完整的介绍,指出了学习的重点和难点,以期同学们在着手解题之前先对概念和思维有一个整体把握,也可供读者在有疑问时方便地回顾查阅。

“典型例题解析”部分,精选了一批有代表性的典型例题和联系实际的应用问题,每题都给出了详尽的解答,并作了一些相关的解析说明。这一部分最能体现本书的特色。

"知识网络图"部分,用框图的形式展示了有关内容的关系结构,使内容更有整体感和立体感,放在例题解析后面,是期望读者在"深入"之后能来个"浅出"。

"本章自测题"为同学们检验学习效果提供了一批练习题,题型与典型例题有较紧密的联系,希望读者能独立求解。附加的简答只是备用的拐杖,希望尽量不要去依赖。

希望同学们在概率统计课程的学习中,紧扣教材,合理利用本指导书,把这门重要课程学得更好!

本书第一章和参考文献由周明华执笔,前言、第二章和第四章由唐明执笔,第三章由李素兰执笔,第五、六、七章由左文新执笔,周明华负责全书的统稿审核。最后所附的"模拟试卷"均是浙江工业大学近年所用过的试卷,分别出自周明华和唐明之手。

由于我们水平有限、时间匆促,书中必会存在诸多不足之处,希望读者不吝赐教,帮助我们不断将它修改完善。

编　者

2005 年 10 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

学习目的和基本要求

(1) 正确理解随机试验、样本空间和随机事件的概念，掌握事件之间的关系与运算.

(2) 正确理解概率的统计定义与古典定义，了解概率的公理化定义及有关性质. 熟练掌握古典概型的概率计算，掌握几何概型的概率计算.

(3) 正确理解条件概率的概念并能熟练地计算条件概率；熟练掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式，并会运用这些公式处理一些较简单的实际问题.

(4) 正确理解事件的独立性概念，学会正确地运用独立性处理实际问题. 理解伯努利概型的现实背景，并能用以解决实际问题.

基本内容与学习重点

一、样本空间与随机事件

1. 随机试验

随机试验：满足下列条件的试验称为随机试验.

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，并能事先知道试验的所有可能结果；

(3) 试验前不能预先知道会出现什么结果.

2. 样本空间、样本点、随机事件的概念

样本空间：随机试验的所有可能发生的结果所组成的全体，通常用 Ω 表示.

样本点 ω：样本空间中的每一个元素(即所界定的基本结果).

随机事件：样本空间 Ω 的某个子集，它在进行一次试验后可能发生，也可能不发生，一般用 A、B、C 等表示. 仅由一个样本点组成的单点集就是基本事件.

必然事件：用 Ω 表示，它表示每次试验后必然会发生的事件.

不可能事件：用 $\varnothing$ 表示，它表示每次试验后一定不会发生的事件.

基本事件:仅由一个样本点组成的单点集.

3. 事件之间的关系

(1) 事件的包含:$B \supseteq A$ 或 $A \subseteq B$;表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) 事件的相等:$A = B$;表示若事件 A 发生则事件 B 也发生,反之,若事件 B 发生则事件 A 也发生,即 A 与 B 互相包含.

(3) 事件的并(和):$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$;表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生.

(4) 事件的交(积):$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,也可写作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$;表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生.

(5) 事件的差:$A - B$;表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

(6) 互不相容(互斥):$A_iA_j = \varnothing (i \neq j)(i, j = 1, 2, \cdots, n)$;表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都不可能同时发生.若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,则它们的和(并)称为直和,特别记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.若还成立 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个划分.

(7) 对立(互逆):$B = \overline{A}$ 或 $A = \overline{B}$;表示 $B \cup A = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$.

(8) 独立:B、A 中任一事件的发生与否,不影响另一事件发生的概率;充要条件:$P(AB) = P(A)P(B)$.

4. 事件的运算律

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;

(3) 分配律:$(A \cup B) \cap C = AC \cup BC, (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) 对偶律(德·摩根律):$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$;

(5) 常用事件运算:对于任意二事件 A、B 有:

$$A \cup B = A + (B - AB) = A + B\overline{A}; A - B = A\overline{B};$$

$$(A - B) + (B - A) = A \cup B - A \cap B; A = AB + A\overline{B};$$

若 $A \subseteq B$,则 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$,且 $B = A + (B - A) = A + B\overline{A}$.

二、古典概率的计算

1. 概率概念及其性质

(1) 概率的统计定义:刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的、介于 0 和 1 之间的数称为随机事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

(2) 概率的公理化定义：设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对 Ω 的每一个子集 A（即随机试验 E 的事件），赋予一个实数 $P(A)$ 与之对应，如果集合函数 $P(\cdot)$ 具有如下性质：

① 对于每一个事件 A，均有 $P(A)\geqslant 0$（"非负性"）；

②$P(\Omega)=1$（"规范性"）；

③ 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的事件序列，则 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

（"可列可加性"），则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(3) 概率的性质：

① 概率加法公式：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n);$$

$n=2$ 时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；特别地，若 $AB=\varnothing$，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

② 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\varnothing$，则

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1.$$

特别地　　$P(\overline{A})=1-P(A).$

③$P(\varnothing)=0.$

④$P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 特别地，若 $A\supseteq B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

(4) 古典概型：设样本空间有 N 个等可能的基本事件，随机事件 A 包含 M 个基本事件，则 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{M}{N}.$$

(5) 几何概型：将古典概型中的有限性推广到无限，保留等可能性，用几何测度之比来代替有限的样本点数之比，就得到几何概型，一般地说，具有下列特点的概率问题称为几何概型：

① 有一个可度量的几何图形 S，试验 E 看成在 S 中随机地投掷一点，且投在任一点是等可能的，即 S 是等可能的样本空间，而事件 A 就是所投掷的点落在 S 中的可度量图形 A 中；

② 事件 A 的概率与 A 的度量 $M(A)$（M 表示几何测度，即度量，指长度、面积、体积等等）成正比，而 S 的度量记作 $M(S)$，则事件 A 的概率定义为：$P(A)=\dfrac{M(A)}{M(S)}$.

2. 条件概率、概率乘法定理

(1) 条件概率：设 A,B 是两个随机事件，且 $P(B)>0$，称 $\frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在 B 已经发生的条件下事件 A 发生的条件概率，记为 $P(A\mid B)$；$P(A)$ 则称为无条件概率.

(2) 概率乘法定理：对随机事件序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P(A_1A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

特别地，对于两个随机事件 A,B，若 $P(A)>0,P(B)>0$，有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)=P(A)P(B\mid A).$$

对于三个随机事件 A,B,C，若 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(A)\,P(B\mid A)P(C\mid AB).$$

3. 全概率公式及贝叶斯公式

(1) 全概率公式：设随机事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容，且随机事件 $A\subseteq B_1+B_2+\cdots+B_n$，则有全概率公式：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

如果随机事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容，且 $B_1+B_2+\cdots+B_n=\Omega$，则全概率公式成立.

注　全概率公式只需在条件 $A\subseteq B_1+B_2+\cdots+B_n$ 满足时即成立，但是使用时常把样本空间 Ω 进行分割，满足的条件往往是 $B_1+B_2+\cdots+B_n=\Omega$.

(2) 贝叶斯公式：假设随机事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,A$ 满足全概率公式成立的条件，则成立贝叶斯公式：

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A\mid B_k)}.$$

注　概率 $P(B_i\mid A)$ 称为试验后的假设概率（"后验概率"），而 $P(B_i)$ 则是试验前的假设概率（"先验概率"）.

4. 随机事件的独立性及伯努利概型

(1) 随机事件的独立性. A,B 是两个随机事件，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称随机事件 A、B 相互独立，此时有：

$$P(A\mid B)=P(A),P(B\mid A)=P(B),$$

即条件概率等于无条件概率.

若随机事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

对于随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_l})=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_l}),$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_l$ 是满足 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_l\leqslant n$ 的任意整数 $(l=2,3,\cdots,n)$，则称随

机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，如果随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(A_i \mid A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_l})=P(A_i)$，其中 $1\leqslant k_1k_2<\cdots<k_l\leqslant n,1\leqslant i\leqslant n$，且 $i\neq k_j$ $(j=1,2,\cdots,l)$.

(2) 独立试验序列及伯努利概型：进行一系列试验，每次试验的结果均与其他各次试验无关，这样的试验称为独立试验序列. 若试验是在同样条件下重复进行的，每次试验中只考察事件 A 是否发生，且概率 $P(A)$ 在各次试验中保持不变，这样的试验称为伯努利试验.

伯努利试验的计算：进行 n 次伯努利试验，设在每次试验中事件 A 发生的概率均为 $p(0<p<1)$，则在 n 次试验中事件 A 恰好发生 m 次的概率为 $p_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$，其中 $q=1-p$. 这个公式也称为伯努利公式.

典型例题解析

例 1.1 袋中有 $a+b$ 只球，其中 a 只白球，b 只黑球，今有 $a+b$ 个人依次从袋中随机取出一球. 求第 k 个人取出的是白球的概率. 若取出的球(1) 不放回；(2) 放回；按两种情况分别计算.

【解】 设 $A=\{$第 k 个人取出的是白球$\}$.

(1) 计算样本点的总数：任取一球，第一人有 $a+b$ 种取法，第二人有 $a+b-1$ 种取法，依次类推第 k 人有 $a+b-k+1$ 种取法. 因此样本点总数为

$$(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1);$$

计算事件 A 所包含样本点数：第 k 个人取出白球有 a 种取法(这里假设 $k\leqslant a$)，而其余 $k-1$ 人任取一球有 $(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$ 种取法，事件 A 所包含样本点数为 $a(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)$；所以事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}=\frac{a}{a+b};$$

(2) 计算样本点的总数：由于是有放回取球，因此第 1 到第 k 个人任取一球都有 $a+b$ 种取法，因此样本点总数为 $(a+b)^k$.

计算事件 A 所包含样本点数：第 k 个人取出白球有 a 种取法，而其余 $k-1$ 人任取一球有 $(a+b)^{k-1}$ 种取法，事件 A 所包含的样本点数为 $a(a+b)^{k-1}$，所以事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b)^{k-1}}{(a+b)^k}=\frac{a}{a+b}.$$

【解析】 此类问题首先要确认每一个球被取到是等可能的，关键是求出样本点总数和事件 A 所包含样本点数，不放回场合与顺序有关，是排列问题；而放回场合涉及重复排列. 在计算事件 A 所包含样本点数时，先考虑第 k 个人取出的球，再考虑其余人取球，这样

计算事件 A 所包含的样本点数比较容易.

例 1.2 在桥牌比赛中,定约人(南家)及其同伴(北家)共有 9 张黑挑,求其余 4 张黑桃在防守方(东、西两家)手中各种分配情况的概率,即

(1)"2—2" 分配的概率;

(2)"1—3" 或"3—1" 分配的概率:

(3)"0 − 4" 或"4—0" 分配的概率.

【解法一】 根据桥牌规则,52 张牌,东西南北每家各 13 张牌. 东西家持有黑桃可能的分布:"0 − 4"、"1—3"、"2—2"、"3—1"、"4—0",可能的总数为

$$N = C_{22}^{13}C_4^0 + C_{22}^{12}C_4^1 + C_{22}^{11}C_4^2 + C_{22}^{10}C_4^3 + C_{22}^{9}C_4^4 = C_{26}^{13} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

东西家"2 − 2" 分配的可能总数为 $M_1 = C_{22}^{11}C_4^2$,其概率为 $p_1 = \dfrac{M_1}{N} = 0.407$;

东西家"1 − 3" 分配的可能总数为 $C_{22}^{10}C_4^3$,"3 − 1" 分配的可能总数为 $C_{22}^{12}C_4^1$,因此东西家"1 − 3" 或"3 − 1" 分配的可能总数为 $M_2 = C_{22}^{10}C_4^3 + C_{22}^{12}C_4^1$,其概率为 $p_2 = \dfrac{M_2}{N} = 0.497$.

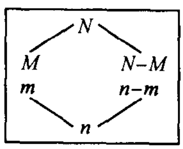
东西家"0 − 4" 分配的可能总数为 $C_{22}^{9}C_4^4$,"4 − 0" 分配的可能总数为 $C_{22}^{13}C_4^0$,因此东西家"0 − 4" 或"4 − 0" 分配的可能总数为 $M_3 = C_{22}^{9}C_4^4 + C_{22}^{13}C_4^0$,其概率为 $p_3 = \dfrac{M_3}{N} = 0.096$.

("0 − 4" 或"4 − 0" 分配的概率还可以这样计算:$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 0.096$. 不过最好是分别计算,然后将其和为 1 作为验证.)

【解法二】 东家需在 26 张牌中取 13 张,不同牌型的样本点总数是 $N = C_{26}^{13}$;而 26 张牌又分为黑桃(4 张) 和其余(22 张) 两组,东家取到 i 张黑桃的样本点数是 $M_i = C_4^i C_{22}^{13-i}$,由此算得"2 — 2 分配" 的概率为 $p_1 = \dfrac{C_4^2 C_{22}^{11}}{C_{26}^{13}} = 0.407$;其余几个小题也可仿此得到与解法一同样的结果.

【解析】 此题属于分组抽样问题,不考虑先后次序,故是一个组合问题,只要把每一种组合情况考虑清楚就行. 解法一的 ① 式中间是各种可能情况总数之和,右端直接算出 C_{26}^{13},它应该是 26 张牌中东家持有 13 张牌的可能组合总数,列出来便于同学们理解.

这类分组抽样问题有一般的模式:设 N 件产品中混有 M 件次品,若任取 n 件检验,则其中恰有 m 件次品的概率为 $p = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$,这是分两组,图示如右;这也就是下一章中超几何分布的实际背景. 若这批产品中有 M_1 件一等品、M_2 件二等品,其余为次品,任取 n 件检验,其中恰有 m_1 件一等品、m_2 件二等品的概率为 $p = \dfrac{C_{M_1}^{m_1} C_{M_2}^{m_2} C_{N-M_1-M_2}^{n-m_1-m_2}}{C_N^n}$,这是分三组;如此类推可得一般.



解法二是分两组时的最简单情形：$N = 26, M = 4, n = 13$.

例 1.3　将 n 个不同的球放入编号为 $1,2,\cdots,N$ 的盒子中(假设每个盒子可以放任意个球)，求下列事件的概率：

(1) 第一个盒子是空盒；

(2) n 个球落入 n 个不同的盒子($n \leqslant N$)；

(3) 第一或第二盒中至少有一个是空盒.

【解】　先求样本点总数：每一个球都可以落入 N 个盒中的任意一个，均有 N 种不同选择，因此样本点总数为 N^n 种.

(1) $A = \{$第一个盒子是空盒$\}$，则事件 A 所包含样本点数为 $(N-1)^n$，事件 A 概率为

$$P(A) = \frac{(N-1)^n}{N^n}.$$

(2) $B = \{n$ 个球落入 n 个不同的盒子$\}$，则事件 B 所包含样本点数为 A_N^n，事件 B 的概率为

$$P(B) = \frac{A_N^n}{N^n}.$$

(3) $C = \{$第一或第二盒中至少有一个是空盒$\}$；$D = \{$第一个盒子是空盒$\}$；$E = \{$第二个盒子是空盒$\}$，则 $C = D \cup E$. 于是"第一或第二盒至少有一个是空盒"的概率为

$$P(C) = P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(DE).$$

事件 D 包含样本点数为 $(N-1)^n$，事件 E 包含样本点数亦为 $(N-1)^n$，而事件 DE 包含样本点数为 $(N-2)^n$，所以得

$$P(C) = \frac{(N-1)^n}{N^n} + \frac{(N-1)^n}{N^n} - \frac{(N-2)^n}{N^n} = \frac{2(N-1)^n - (N-2)^n}{N^n}.$$

【解析】　第(1)小题涉及重复排列问题. 第(2)小题是选排列问题，与顺序有关. 第(3)小题在(1)的基础上再利用事件之间的关系，运用加法公式即可.

【讨论】　生日问题. 一年以 365 天计，每个人的生日均等可能地发生在 365 天中的某一天. 现有 n 个人，问这 n 个人中至少有 2 个人生日相同的概率.

365 天可以认为是 N 个盒子，人相当于球，"n 个人中至少有 2 个人生日相同"的逆事件相当于"n 个球落入 n 个不同的盒子"，因此所求事件的概率为

$$P_n = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

下表列出若干个 n 所对应的概率

n	80	70	60	50	40	30	25	23	20
P_n	0.9999	0.9992	0.9941	0.9704	0.8912	0.7063	0.5687	0.5073	0.4114

例 1.4　从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的概率是多少？

【解法一】　从 5 双(10 只)鞋子中任取 4 只，共有 C_{10}^4 种取法. 记 $A=\{4$ 只鞋子中至少有两只鞋子配对$\}$，则 $\overline{A}=\{4$ 只鞋子都不配对$\}$，其所含基本事件数为 $C_5^4\times 2^4$(先从 5 双中任选 4 双，共有 C_5^4 种取法，然后从每双中任取一只，共有 2^4 种取法)，因此得 $P(\overline{A})=\dfrac{C_5^4\times 2^4}{C_{10}^4}=\dfrac{80}{210}=\dfrac{8}{21}$，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{13}{21}.$$

【解法二】　设取鞋子时是一只一只地取，并考虑次序(记号同解法一)，则基本事件总数为 A_{10}^4，$\overline{A}$ 所包含的基本事件数为 $10\times 8\times 6\times 4$($\overline{A}$ 中第二只的取法为 8 的理由是：第一只取出后，应去除与已取出配对的另一只，在余下的 8 只中选取；其余类推)，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times 8\times 6\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}=\frac{13}{21}.$$

【解法三】　设 $A_i=\{$取出的四只鞋子中恰好有 i 双配对$\}(i=1,2)$，易见 $A_1A_2=\varnothing$，记号 A 的意义同前，则 $A=A_1+A_2$. A_1 包含基本事件为从五双不同鞋子中任取一双，同时在另外 4 双鞋子中任取不能配对的二只，它共有 $C_5^1[C_8^2-C_4^1]$(或 $C_5^1C_4^2 2^2$) 种取法，而 A_2 有 C_5^2 种取法. 故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_5^1[C_8^2-C_4^1]+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

【解法四】　记号意义同前. $\overline{A}$ 中基本事件数为：所取得 4 只鞋子中左脚有 $k(k=0,1,2,3,4)$ 只，则剩余的 $4-k$ 只右脚只能在其余的 $5-k$ 双鞋子中去取，共有 $\sum\limits_{k=0}^{4}C_5^kC_{5-k}^{4-k}=80$ 种，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\sum_{k=0}^{4}\frac{C_5^kC_{5-k}^{4-k}}{C_{10}^4}=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}.$$

【解析】　此题提供了多种解题方法，思路各有不同，以帮助同学们开阔思路. 在分析样本点时，应特别注意避免重复计算和漏算.

例 1.5　在 11 张卡片上分别写上 Probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求排列结果为 ability 的概率.

【解法一】　假设字母为 b 或 i 的各两张卡片是可区分的. 基本事件总数为 A_{11}^7.

$A=\{$排列结果为 ability$\}$，则 A 中所包含的基本事件数为 $C_2^1\times C_2^1=2\times 2=4$. 故

$$P(A) = \frac{4}{A_{11}^7} = \frac{1}{415800} \approx 0.0000024.$$

【解法二】 设 A_1、B_2、I_3、L_4、I_5、T_6、Y_7 表示依次取得 a、b、i、l、i、t、y 的事件，利用乘法公式及条件概率，知

$$P(A_1B_2I_3L_4I_5T_6Y_7) = \frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{415800} \approx 0.0000024.$$

【解析】 解法一把每一个字母(包括 2 个 b，2 个 i) 看成是可区分的，这样才能保证每一个字母有同样的可能被取到，这是古典概型的前提. 解法二用的是乘法公式及条件概率.

例 1.6 设 $a>0$，在 $(0,a)$ 任取两个数 x 和 y，求 $xy<a^2/4$ 的概率.

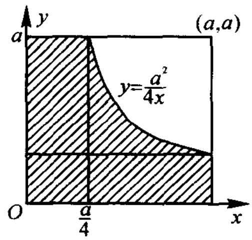


图 1.1

【解】 由题意知 x,y 是在区间 $(0,a)$ 中随机取得的两个数. 若把 (x,y) 看成平面直角坐标系中的一个点，则这些点的全体就是图 1-1 所示的正方形 S，而事件 $A=\{xy<a^2/4\}$ 则是图中的阴影部分，这两块面积之比就是所求的概率：

$$p = \frac{M(A)}{M(S)} = \frac{a^2/4 + \int_{a/4}^{a} a^2/4x\,\mathrm{d}x}{a^2} = \frac{a^2/4 + (\ln 2)a^2/2}{a^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

注 阴影部分的面积也可以用二重积分来算：

$$M(A) = a^2 - \int_{a/4}^{a}\mathrm{d}x\int_{a^2/4x}^{a}\mathrm{d}y = a^2 - \int_{a/4}^{a}(a - a^2/4x)\mathrm{d}x$$
$$= a^2 - \frac{a^2}{4}(3 - 2\ln 2) = \frac{a^2}{4}(1 + 2\ln 2).$$

【解析】 几何概型解题思路与古典概型类似，只需求出样本空间的"样本点总数"(样本空间的度量) 以及所求事件中含的"样本点数量"(相应事件的度量)，然后相除即可，较困难的是将所求的事件用几何测度准确表达出来.

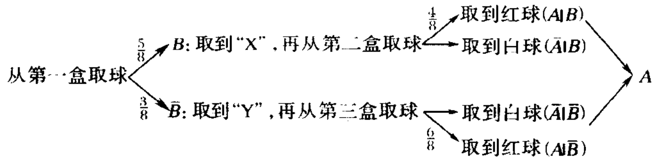
例 1.7 有外形相同的球，分装三个盒子，每盒 8 个，其中第一个盒子中 5 个球标有字母 X，3 个球标有字母 Y，第二个盒子中有红球和白球各 4 个. 第三个盒子中则有红球 6 个白球 2 个. 试验按如下规则进行：先在第一个盒子中取一球，若取得标有字母 X 的球，则在第二个盒中任取一球，若在第一个盒子中取得标有字母 Y 的球，则在第三个盒子中取一球，如果第二次取得的是红球则称试验成功. 试求试验成功的概率.

【解】 $A=\{$试验成功$\}=\{$第二次取得的是红球$\}$；

$B=\{$从第一个盒子中任取一球标有字母 $X\}$；则 $\overline{B}=\{$从第一个盒子中任取一球标有字母 $Y\}$；

$$P(A) = P(B)P(A\mid B) + P(\overline{B})P(A\mid\overline{B}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8} = \frac{19}{32} = 0.59375.$$

【解析】 这是一个典型的全概率问题，要合理设立各种事件的字母，用字母把思路表达清楚(初学者不妨多设几个字母，便于分析). 全概率问题一般可分解为几个前后相继的过程，分析时层次一定要清楚. 下面的图称为“概率树”，对于分析是有帮助的：



例 1.8 某中学应届考生中第一志愿报考甲、乙、丙三类专业的比率分别为 70%，20%，10%，而第一志愿录取率分别为 90%，75%，85%. 试求：

(1) 随机调查一名考生，他如愿以偿的概率；

(2) 若某位考生按第一志愿被录取了，那么第一志愿报考的是甲类专业的概率.

【解】 (1) 是全概率问题. 设 $A=\{$报考甲类专业$\}$，$B=\{$报考乙类专业$\}$，$C=\{$报考丙类专业$\}$，$E=\{$如愿录取$\}$. 则 A,B,C 互不相容，且 $A+B+C=\Omega$. 由全概率公式得：

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A)P(E\mid A)+P(B)P(E\mid B)+P(C)P(E\mid C)\\&=0.7\times0.9+0.2\times0.75+0.1\times0.85=0.865.\end{aligned}$$

(2) 是贝叶斯问题，直接用公式得

$$\begin{aligned}P(A\mid E)&=\frac{P(AE)}{P(E)}=\frac{P(A)P(E\mid A)}{P(E)}\\&=\frac{0.7\times0.9}{0.7\times0.9+0.2\times0.75+0.1\times0.85}=\frac{0.63}{0.865}=0.728.\end{aligned}$$

【解析】 这是典型的应用全概率公式和贝叶斯公式的题目，两者常常结合在一起. 请注意比较验前概率 $P(A)$ 和验后概率 $P(A\mid E)$ 的区别和联系.

例 1.9 已知 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.2$. 试求：

(1) $P(B\mid A)$； (2) $P(A\mid B)$；

(3) $P(B\mid A\cup B)$； (4) $P(\overline{A}\cup\overline{B})\mid(A\cup B)$.

【解】 (1) $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.2}{0.3}=\dfrac{2}{3}$；

(2) $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.2}{0.4}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $$\begin{aligned}P(B\mid A\cup B)&=\frac{P(B\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(AB)}\\&=\frac{0.4}{0.3+0.4-0.2}=\frac{4}{5};\end{aligned}$$

(4) $$P(\overline{A}\cup\overline{B})\mid A\cup B)=\frac{P((\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\overline{A}B\cup A\overline{B})}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$