考试用书

执业资格考试丛书

注册岩土工程师基础考试复习教程

（第二版）

同济大学 编

中国建筑工业出版社

执业资格考试丛书

注册岩土工程师基础考试
复 习 教 程

（第二版）

同济大学 编

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

注册岩土工程师基础考试复习教程/同济大学编．—2版．
北京：中国建筑工业出版社，2006
（执业资格考试丛书）
ISBN 7-112-08149-1

Ⅰ．注…　Ⅱ．同…　Ⅲ．岩土工程-工程技术人员
-资格考核-自学参考资料　Ⅳ．TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 011507 号

本书目的是为岩土工程师参加注册土木工程师考试提供复习用资料，包括了注册土木工程师基础考试大纲规定的内容。编写过程中充分考虑了教学和自学复习的特点，既注意突出重点，又遵守循序渐进的规律，尽量简明扼要，说理清晰，并附有例题习题。全书共分：高等数学、普通物理、普通化学、理论力学、材料力学、流体力学、计算机应用基础、电工电子技术、工程经济、土木工程材料、工程测量、职业法规、土木工程施工与管理、结构力学与结构设计、岩体力学与土力学、工程地质、岩体工程与基础工程十七章。除供岩土工程师参加注册工程师考试复习参考外，也可供一般土木工程师学习和应用参考。

* * *

责任编辑　咸大庆

执业资格考试丛书
注册岩土工程师基础考试复习教程
（第二版）
同济大学　编

*

中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
新　华　书　店　经　销
北京市兴顺印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米　1/16　印张：83¾　字数：2035 千字
2003 年 5 月第二版　2006 年 2 月第三次印刷
印数：22001—24600 册　定价：**144.00** 元
ISBN 7-112-08149-1
（14103）

（邮政编码　100037）

本社网址：http://www.cabp.com.cn
网上书店：http://www.china-building.com.cn

前　　言

全国注册土木工程师（岩土）考试每年 9 月份进行，本教程的第一版已于 2002 年在全国发行。现根据中国建筑工业出版社的要求，对第一版进行全面的修订工作。为此，我们又组织原班人马，历时 5 个月的时间，对第一版教程进行了系统而又全面的修改工作。本教程的修改仍是以注册土木工程师基础考试大纲为基础，针对原有教程篇幅大、内容多的特点，作了一定的删减，做到更贴近大纲内容；同时，对第一版内容中的错误作了全面的修改和更正，为本教程高质量的出版提供了保证。

参与本教程编写的成员由同济大学教务处指定，有关教师涉及同济大学土木工程学院、理学院、材料科学与工程学院、经济与管理学院、电子信息与工程学院、文法学院，均为相关专业的骨干授课教师，他们在长期的教学实践中积累有丰富的教学经验和教材编写经验。本教程的编写得到同济大学诸多老师的大力支持，在此表示衷心的感谢。

本教程由同济大学朱合华、黄自萍、胡展飞、唐寿高、叶为民、赵春风负责组稿、审定、校核，全书最后由朱合华统一定稿。由于时间仓促，加之教程内容广泛，难免有差错之处，敬请读者谅解。

本教程由同济大学朱合华任主编，黄自萍、胡展飞、唐寿高、叶为民、赵春风任副主编。全书各章负责撰写人员如下：

第一章　高等数学　蒋凤瑛　徐建平
第二章　普通物理　王少杰　于明章　赵春风
第三章　普通化学　邓子峰　陆国弟
第四章　理论力学　费文兴
第五章　材料力学　袁斯涛
第六章　流体力学　方　平
第七章　计算机应用基础　黄自萍　李晓军
第八章　电工电子技术　石人珠
第九章　工程经济　张维然　翁晓红　段振梁　张跃红
第十章　土木工程材料　杨正宏
第十一章　工程测量　鲍　峰　程效军
第十二章　职业法规　杨心明
第十三章　土木工程施工与管理　徐　伟　马锦明
第十四章　结构力学与结构设计　袁　勇　汤永净
第十五章　岩体力学与土力学　沈明荣　李镜培
第十六章　工程地质　唐世栋　叶为民　石振明
第十七章　岩体工程与基础工程　石振明　张　雷　李镜培　叶观宝

目　　录

第一章　高　等　数　学

第一节　向量代数与空间解析几何

一、向量代数

既有大小，又有方向的量称为向量，在数学上经常用有向线段来表示向量。向量一般记作$\vec{a}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$等。以坐标原点 O 为起点，向空间一点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$叫做点 M 关于点 O 的向径，可记作$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$。向量的大小叫做向量的模，记作$|\vec{a}|$等，模等于 1 的向量叫做单位向量，模等于零的向量叫做零向量记作$\vec{0}$，它的方向可以看作是任意的。

（一）向量的坐标

在空间直角坐标系中，以$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$分别表示沿 x，y，z 轴正向的单位向量，并称它们为这一坐标系的基本单位向量，向量$\vec{a}$按基本单位向量的分解式为$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，其中 a_x，a_y，a_z 为向量$\vec{a}$在三个坐标轴上的投影，叫做向量$\vec{a}$的坐标，并记$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$为向量$\vec{a}$的坐标表达式。

利用向量的坐标，可得向量的模，方向余弦等：

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}。$$

向量$\vec{a}$的单位向量$\vec{a}^o=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\nu)$，并有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\nu=1。$$

起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的向量记为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)。$$

特别，点 $M(x,y,z)$的向径记为$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$。

利用向量的坐标还可得向量的加减法、数乘等运算。

设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)，其中\ \lambda\ 为数。$$

（二）数量积，向量积

设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$。

(1)数量积　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\widehat{\vec{a},\vec{b}}\rangle=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，其中$\langle\widehat{\vec{a},\vec{b}}\rangle$表示向量$\vec{a}$与$\vec{b}$之间的夹角，$(0<\langle\widehat{\vec{a},\vec{b}}\rangle<\pi)$。

$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$。

若$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$，则$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$。

(2)向量积　$\vec{a}\times\vec{b}$，其大小$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\widehat{\vec{a},\vec{b}}\rangle$，其方向垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$且$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$成右手系。

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}。$$

注意：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$。

若$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$，则$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

【例 1】　求平行于向量$\vec{a}=(2,3,4)$的单位向量。

【解】　与向量$\vec{a}$平行的单位向量有两个，一个与$\vec{a}$同向，另一个与$\vec{a}$反向，

$$\vec{a}^{o}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{29}}(2,3,4)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}\right),$$

故平行于$\vec{a}$的单位向量为$\pm\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}},\dfrac{3}{\sqrt{29}},\dfrac{4}{\sqrt{29}}\right)$。

【例 2】　已知$\vec{a}=(1,1,-4)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$求$\vec{a}+\vec{b}$，$(3\vec{a})\cdot(4\vec{b})$，及$(2\vec{a})\times(-\vec{b})$，$\cos\langle\widehat{\vec{a},\vec{b}}\rangle$。

【解】　$\vec{a}+\vec{b}=(1+1,1-2,-4+2)=(2,-1,-2)$，

$$(3\vec{a})\cdot(4\vec{b})=12\,\vec{a}\cdot\vec{b}=12[1\times 1+1\times(-2)+(-4)\times 2]=-108,$$

$$(2\vec{a})\times(-\vec{b})=2\vec{b}\times\vec{a}=2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -4\end{vmatrix}=2(6\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k})$$

$$=(12,12,6),$$

$$\cos\langle\widehat{\vec{a},\vec{b}}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\times 1+1\times(-2)+(-4)\times 2}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{-9}{\sqrt{18}\cdot 3}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

【例 3】　已知$\vec{a}=(3,5,-2)$，$\vec{b}=(2,1,4)$，问选取怎样的 λ 和 μ 能使$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$与$\vec{c}=(0,0,1)$垂直。

【解】　$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$，

$$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}=-2\lambda+4\mu=0,$$

因而选取的 λ 和 μ 应该有关系 $\lambda=2\mu$。

【例 4】 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(2,0,7)$ 沿直线移动到点 $M_2(0,3,1)$，计算重力所作的功（长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向）。

【解】 $\overrightarrow{M_1M_2}=(0-2,3-0,1-7)=(-2,3,-6)$，

$\vec{F}=(0,0,-100\text{g})=(0,0,-980)$，

这样 $W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,3,-6)\cdot(0,0,-980)=5880(\text{J})$。

二、曲面（旋转曲面，柱面，二次曲面）

如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下列关系：曲面 S 上任一点的坐标都满足方程，不在曲面 S 上的点都不满足方程，则方程 $F(x,y,z)=0$ 叫做曲面 S 的方程，而曲面 S 叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形。

（一）旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，这条定直线叫做旋转曲面的轴。

设 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，其方程为 $f(y,z)=0$，把这曲线绕 z 轴旋转一周就得到一个以 z 轴为旋转轴的旋转曲面，其方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$。同样，曲线 C 绕 y 轴旋转成的旋转曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$。

【例 5】 将 yOz 坐标面上的直线 $z=ay$ 绕 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面方程。

【解】 根据题意，绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$z=\pm a\sqrt{x^2+y^2}$$

即 $z^2=a^2(x^2+y^2)$，这是顶点在原点 O，半顶角为 $\alpha=\operatorname{arccot}a$ 的圆锥面。

【例 6】 将 xOz 坐标面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴及 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程。

【解】 绕 x 轴旋转所成的旋转曲面方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$，绕 z 轴旋转所成的旋转曲面称的方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$。

上述两旋转曲面称为旋转双曲面。

（二）柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面，其中定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线。

例如 方程 $F(x,y)=0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的曲线 $C:F(x,y)=0$。

【例 7】 指出下列方程在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x^2+y^2=4$；(2) $z=y+1$；(3) $x^2-z^2=1$。

【解】 (1)$x^2+y^2=4$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴，其准线是 xOy 面上椭圆 $x^2+y^2=4$ 的椭圆柱面。

(2)$z=y+1$ 在空间直角坐标中表示母线平行于 x 轴，其准线是 yOz 面上直线 $z=y+1$ 的柱面，它是平面。

(3)$x^2-z^2=1$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 y 轴，其准线是 xOz 面上双曲线 $x^2-z^2=1$ 的双曲柱面。

(三)二次曲面

用三元二次方程表示的曲面叫做二次曲面，常见的二次曲面有

球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$；

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$($p,q$ 同号)；

双曲抛物面(马鞍面) $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$($p,q$ 异号)；

单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$；

二次锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$。

【例 8】 指出下列方程表示什么曲面

(1)$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=1$， (2)$\dfrac{z}{3}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$，

(3)$16x^2+y^2-2z^2=8$， (4)$z^2=a^2(x^2+y^2)(a>0)$。

【解】 (1)表示椭球面； (2)表示椭圆抛物面；

(3)表示单叶双曲面； (4)表示(圆)锥面。

三、平面

(一)平面方程

1. 点法式方程：如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法(线)向量，设平面过点(x_0,y_0,z_0)且以$\vec{n}=(A,B,C)$为法向量，则其点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0。$$

2. 一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$，

其中$\vec{n}=(A,B,C)$为平面的法向量且 $A^2+B^2+C^2\neq0$。

3. 截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，

其中 a,b,c 依次为平面在x,y,z 轴上的截距。

(二)两平面的夹角，点到平面的距离

1. 两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角,通常两平面的夹角为锐角。

设平面 π_1 和 π_2 方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,其中 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$,平面 π_1 和 π_2 的夹角 θ 可由 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ 来确定。

并由此推得下列结论

$$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0,$$

$$\pi_1/\!/\pi_2\Leftrightarrow\vec{n}_1\times\vec{n}_2=0\Leftrightarrow\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}。$$

【例 9】 求过点 $A(1,1,-1)$,$B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 三点的平面方程。

【解】 取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2-1&-2-1&2+1\\1-1&-1-1&2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&-3&3\\0&-2&3\end{vmatrix}$

$=3(-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})$,

这样由平面的点法式方程得

$$-1\times(x-1)+3\times(y-1)+2\times(z+1)=0$$

即 $x-3y-2z=0$。

2. 点到平面的距离公式

平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到该平面的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

【例 10】 求点(1,2,1)到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离。

【解】 由点到平面的距离公式知

$$d=\frac{|1\times1+2\times2+1\times2-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1$$

四、空间曲线及其空间曲线方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线,设两个相交曲面方程分别为 $F(x,y,z)=0$,$G(x,y,z)=0$,则 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 表示它们的交线 C,也把 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 叫做空间曲线 C 的一般方程。

例如 $x+y+z=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=4$ 分别表示空间的平面及球面,它们的交线 $\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$ 则表示空间的一个圆。

空间曲线的 C 的方程也可以用参数形式表示,若将 C 上的动点的坐标 x,y,z 表示成参数 t 的函数,则

$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ 叫做空间曲线的参数方程。

例如　参数方程$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$　(a,b,c 均为常数)表示的空间曲线为螺旋线。

五、直线

(一)直线方程

1. 空间直线的一般方程

空间直线 l 可看作是两相交平面的交线,设两平面方程分别为

$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$,

则$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 表示 π_1 与 π_2 的交线 l,方程组$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 也叫做空间直线的一般方程。

2. 空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量 $\vec{s} = (m,n,p)$平行于一条已知直线 l,这个向量 $\vec{s}$ 就叫做该直线的方向向量。

假设直线过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$且与方向向量 $\vec{s} = (m,n,p)$平行,则

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

就叫做直线 l 的对称式方程或点向式方程。

如果令$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$,就得到空间直线的参数方程$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$。

【例 11】 设直线过空间点 $M_1(1,2,3)$及点 $M_2(4,6,8)$,写出该直线的对称式方程及参数方程。

【解】 由 $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (4-1,6-2,8-3) = (3,4,5)$知该直线对称式方程为

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5},$$

其参数方程为$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$。

(二)两直线的交角

两直线的方向向量的夹角叫做两直线的夹角,通常该夹角为锐角,设直线 l_1 和 l_2 的方向向量为 $\vec{s}_1 = (m_1,n_1,p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2,n_2,p_2)$,则 l_1 和 l_2 的夹角$\langle \widehat{l_1, l_2} \rangle$可由

$$\cos\langle \widehat{l_1, l_2} \rangle = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

给出,并由此推出下列结论

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}。$$

【例 12】 求直线 $l_1 \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-3t \\ z = 7t \end{cases}$ 和直线 $l_2 \begin{cases} 2x - y + 4z + 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$ 的夹角

【解】 由 $\vec{s}_1 = (3,-3,7)$，$\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5,2,3)$知

$$\cos\langle \widehat{l_1 l_2} \rangle = \frac{|3\times(-5)+(-3)\times 2 + 7\times 3|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+7^2}\sqrt{(-5)^2+2^2+3^2}} = 0,$$

故$\langle \widehat{l_1 l_2} \rangle = \frac{\pi}{2}$，即 l_1 与 l_2 垂直。

(三)直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角$\langle \widehat{l,\pi} \rangle$称为直线与平面的夹角，通常该夹角取锐角，当直线与平面垂直时，规定其夹角$\langle \widehat{l,\pi} \rangle = \frac{\pi}{2}$。

设直线 l 的方向向量为$\vec{s} = (m,n,p)$，平面 π 的法向量为$\pi = (A,B,C)$，则直线 l 与平面π 的夹角可由

$$\sin\langle \widehat{l,\pi} \rangle = |\cos\langle \widehat{\vec{s},\vec{n}} \rangle| = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

给出，并由此推出下列结论：

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p},$$

$$l /\!/ \pi \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0。$$

【例 13】 已知平面 $\pi: y+2z-2=0$ 和直线 $x = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$，问它们是否平行。

【解】 已知平面 π 的法向量为$\vec{n} = (0,1,2)$，直线 l 的方向向量为$\vec{S} = (1,2,3)$，由$\vec{S}\cdot\vec{n} = 0\times 1 + 1\times 2 + 2\times 3 = 8 \neq 0$ 知该平面与直线不平行。

第二节 微 分 学

一、函数与极限

(一)函数的概念与特性

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定

法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域，$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 为函数的值域，$C=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形。

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数。

把直接函数 $y=f(x)$ 中的因变量 y 看作自变量，而把自变量 x 看作因变量，按照函数概念，就得到一个新的函数，这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$。

如果把直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，则这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的。

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2 上有定义，而 $W_2=\{u|u=\varphi(x),x\in D_2\}\subset D_1$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 就称为函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数。

2. 初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数。

3. 函数的几个特性

(1)函数的有界性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，若存在正数 M，使 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in X$，则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

(2)函数的单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的。

(3)函数的奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

(4)函数的周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且恒有 $f(x\pm l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，这里 l 通常取最小正周期。

【例 1】 下列函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$。

【解】 (1)不相同，$D_f=\{x|x\neq 0\}$，$D_g=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，

故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同。

(2)不相同，$f(x)=x$，$g(x)=|x|$，故它们的对应规律不同。

(3)不相同，$D_f=\{x|x\neq 0\}$，$D_g=\{x|x>0\}$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同。

(4)相同，$f(x)=1$，$g(x)\equiv\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$，故它们具有相同的定义域与对应规律。

【例 2】 求函数 $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$的定义域。

【解】 当 $\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时，函数有意义，由$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，即$(x-1)(x-4)\leqslant 0$ 解得 $1\leqslant x\leqslant 4$，故定义域为$[1,4]$。

【例 3】 判定 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性。

【解】 由 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$ $=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$知 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数。

(二)数列的极限

如果当 $n\to\infty$时，数列 x_n 无限接近于某个确定的数值a，则称 a 为该数列x_n 的极限，或称数列 x_n 收敛于a，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或$x_n\to a(n\to\infty)$。

例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 等。

数列$\{x_n\}$若收敛，其极限唯一，且该数列必有界。

【例 4】 求下列数列极限

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2+3n+5}$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$。

【解】 (1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2+3n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{1}{2}$。

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$。

(三)函数的极限

1．函数极限的概念

(1)自变量趋于有限值时的极限

如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$无限接近于确定的数值 A，则称 A 是函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或$f(x)\to A(x\to x_0)$。

上述 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限概念中，x 是既从x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 的。如果 x 仅从x_0 的右侧趋于 x_0(记作 $x\to x_0^+$)，则称 A 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时右极限，记作 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，如果 x 仅从x_0 的左侧趋于 x_0(记作 $x\to x_0^-$)，则称 A 为函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$。

函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是其左极限及右极限各自存在并且相等，即 $f(x_0^+)=f(x_0^-)$。

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 而且$A>0$(或 $A<0$)，则存在点 x_0 的去心邻域，当 x 在该邻域内时，就有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)。

反之，如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$