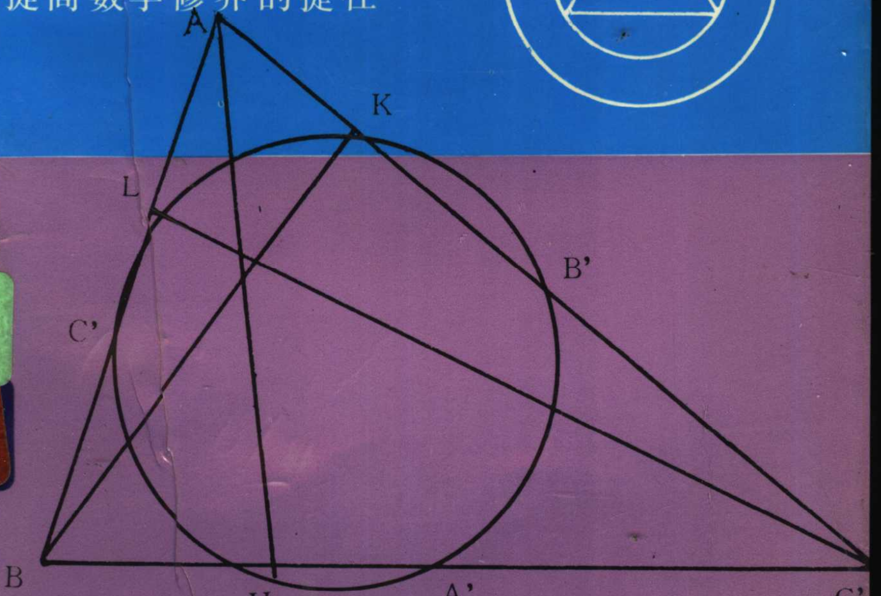
学生课外读物

中外数学名题荟萃

金保云　刘　斌

（初中小学册）

数学史上的丰碑
解题方法的宝库
数学竞赛试题的摇篮
提高数学修养的捷径

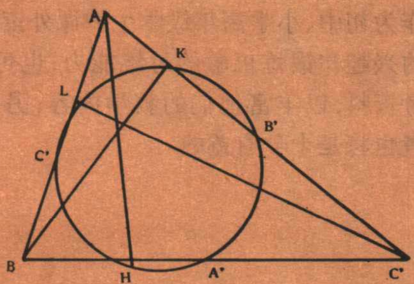


学生课外读物

中外数学名题荟萃

金保云　刘　斌

（初中小学册）



湖北人民出版社

鄂新登字 01 号

学生课外读物
中外数学名题荟萃(初中小学册)

金保云　刘　斌　主编

出版: 发行: 湖北人民出版社	地址:武汉市解放大道新育村 33 号 邮编:430022
印刷:湖北省枝江市新华印刷厂	经销:湖北省新华书店
开本:787 毫米×1092 毫米 1/32	印张:8.75
字数:189 千字	插页:1
版次:1994 年 3 月第 1 版	印次:1997 年 8 月第 2 次印刷
印数:10 121—20 170	定价:9.60 元
书号:ISBN 7-216-01340-9/O·3	

前　言

问题与解决是数学的心脏。提出问题并解决问题是数学发展的原动力。不管是埃及的“草片”文书、欧几里得的《几何原本》，还是我国的《周髀算经》、《九章算术》，都是以一个又一个问题及解决的形式呈现出来。它们忠实地记录了人类发现或提出问题，并进而解决问题、推动数学发展的进程。

在数学发展的历史长河中，有的问题曾掀起惊涛巨浪，引发数学危机；有的问题像暗礁险滩，使数代人冥思苦想、望题兴叹；而有的问题则如同晶莹剔透的浪花，其巧妙的构思，优美的解法，使人赏心悦目，拍案叫绝。正是这一个个的问题，激发一代代青年人热爱数学、献身数学、推动了数学的发展。

由于种种原因，今天的数学教材，难以体现出“问题与解决”的韵味，没能提供机会让青少年学生接触丰富的数学遗产。过度的公理化、形式化及解题的模式化，使数学失去了原有的魅力。致使不少青少年学生错误地认为数学只是符号与公式的组合，难以激发他们学习数学的热情和兴趣。

近年来，不少有识之士建议在中小学加强数学史的学习，加强解题教学的研究，这确是针砭时弊的真知灼见。我们不打算详细介绍丰富的数学史料，也不打算探讨系统的解题思想和方法。只想和青少年朋友一起，驾一叶扁舟，在数学发展的历史长河中漫游，或采一片礁石，或掬一朵浪花。兴之所至，或探踪寻源，或荡舟而过。为此，我们选编了近 150 道初等数学名题呈献在青少年朋友面前。

本书共分两册，一册主要适用于初中及小学，另一册适用于高中。编写中，我们尽量避开高等数学的专门理论，侧重于用初等方法解决问题。并尽可能体现历史的本来面貌。

本书编写中查阅了许多专著和资料，我们向原书的编著者表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，错误和缺点之处难免，敬请指正。

编者

1993 年 9 月于武昌

目　　录

1. 爱因斯坦的九圆圈填数问题…………………… (1)
2. 神龟背上的"洛书"…………………………… (4)
　　——幻方问题
3. 德·梅齐里亚克的砝码问题…………………… (8)
4. 引人注目的七个 7 问题 ………………………… (11)
5. 阿拉伯人的第一件数学成果 …………………… (16)
　　——柯拉的求亲和数规则
6. 完全数问题撷趣 ………………………………… (21)
7. 再谈完全平方数 ………………………………… (25)
8. 丢番图《算术》中的问题选粹 ………………… (30)
9. 世界数学史的光辉篇章 ………………………… (36)
　　——中国剩余定理
10. 精益求精的圆周率……………………………… (41)
11. 方程术与齐同术………………………………… (50)
12. 衍母术…………………………………………… (54)
13. 别开生面的假设法(盈不足术)………………… (59)
　　——"金锭与银锭"问题

14. 勾股定理应用一例…………………………………… (66)
15.《九章算术》均输问题…………………………………… (68)
16.《数书九章》中的偷米问题…………………………… (71)
17. 有趣的勾股数组…………………………………… (73)
18. 素数的个数是无穷的吗？…………………………… (78)
19. $\sqrt{2}$引发的第一次数学危机 ………………… (81)
20. 一元方程解法趣谈…………………………………… (87)
21. 只剩最后一步需证的难题…………………………… (94)
——哥德巴赫猜想
22. 悬赏 10 万马克的定理…………………………… (100)
——费尔马大定理
23. 费尔马小定理 ……………………………………… (107)
24. 埃拉托色尼的选素数筛法 ………………………… (111)
25. 十九世纪最著名的猜想 …………………………… (113)
——素数定理
26. 一个特殊形式的合数 ……………………………… (116)
27. 阿基米德和 ………………………………………… (118)
28. 阿基米德牛群问题 ………………………………… (123)
29. 费马——欧拉素数定理 …………………………… (129)
30. 回文数猜想集锦 …………………………………… (132)
31. 完全平方数问题撷趣 ……………………………… (135)
32. 阿拉伯的假设法 …………………………………… (143)
33. 阿利哈塔的三角堆求和问题 ……………………… (145)
34. 世界大文豪给出的数学名题(一) ……………… (147)
——托尔斯泰的“木桶流水”问题
35. 世界大文豪给出的数学名题(二) ……………… (150)

——托尔斯泰的“割草”问题
36. 牛顿的“牛吃牧草”问题 …………………… (152)
37. 牛顿的“财产”问题 …………………… (155)
38. 欧拉的“鸡蛋”问题 …………………… (157)
39. 塞马锐达斯之花 …………………… (161)
40. 一次不定方程问题 …………………… (164)
41. “伟大的埃及金字塔” …………………… (167)
——莫斯科纸草书问题 14
42. 第一个在数学史上留名的人 …………………… (169)
——泰勒斯发现的定理
43. 几何的基石，证法最多的定理…………………… (171)
——勾股定理
44. 化曲为直的杰作 …………………… (180)
——希波克拉茨定理
45. 寻求最短路径的海伦定理 …………………… (184)
46. 古希腊几何学的一颗明珠 …………………… (190)
——黄金分割
47. 有强大生命力的梅涅劳斯定理 …………………… (198)
48. 梅涅劳斯定理的姊妹定理 …………………… (200)
——塞瓦定理
49. 求三角形面积的公式 …………………… (203)
50. 数学家的“圣经” …………………… (209)
——《几何原本》中第Ⅵ卷命题 3
51. 一个重要的轨迹 …………………… (218)
——阿波罗尼斯圆
52. 阿波罗尼斯定理 …………………… (222)

53. 迟到的定理 …………………………………… (225)
——斯蒂瓦特定理
54. 三角形的五心 …………………………………… (228)
55. 以天文学为动力而发现的几何定理 ………… (237)
——托勒密定理
56. 圆幂定理 …………………………………… (245)
57. 婆罗摩及多定理 …………………………………… (249)
58. 经济学家感兴趣的维维安尼定理 …………… (254)
59. 叫错了名字的著名定理 ………………………… (256)
——西姆松定理
60. 三角形的垂心与西姆松线之间的关系 ……… (258)
——斯坦纳定理
61. 军事技术家对西姆松定理的引申 …………… (261)
——卡诺定理
62. 十六岁少年发现的“清宫定理” ……………… (263)
63. 中学教师打破了数学家的悲观论调 ………… (265)
——蝴蝶定理的初等证法
参考文献 …………………………………… (272)

1. 爱因斯坦的九圆圈填数问题

如图所示的九个圆心是四个小的等腰三角形的顶点，在图上将 1—9 这九个数字填入圆圈，要求这七个三角形中每个三角形三个顶点上的数字之和都相同。

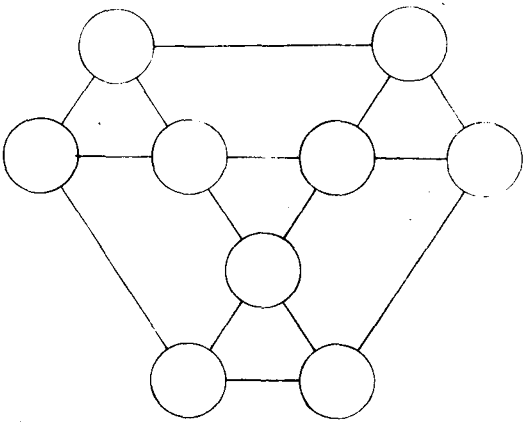


图 1

【背景材料】

此题是由爱因斯坦(A · Einstein，1879—1955)给出的。爱因斯坦在全世界闻名之后，仍继续为《法兰克福报》写稿，为

读者提出一些数学问题，此题就是一例。

【解题方法】

设构成七个等腰三角形的九个顶点分别为 A、B、C、D、E、F、G、H、I(如图 2)。

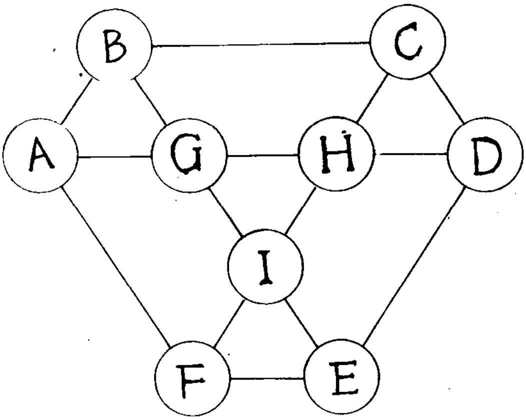


图 2

观察可知△ABG，△CDH，△EFI 没有公共的顶点，又 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45，且已知上述三角形的三个顶点所在数的和应相等，因此，我们可以知道：

每个三角形的三个顶点的和应为：

$$\frac{45}{3}=15$$

而 1—9 这九个数中每三个数的和为 15 的所有可能为：

1+5+9； 1+6+8； 2+4+9； 2+5+8； 2+6+7；3+4+8； 3+5+7； 4+5+6.

考虑到等腰三角形 GHI 处在六边形 ABCDEF 的中央，为配数的需要，应把 1—9 中处在中间段的数 4,5,6 放在 GHI 的位置上，不妨设 $G=6,H=5,I=4$（亦可以：$G=4,H=5,I=6$ 或 $G=5,H=4,I=6$ 等）。此时，A 有六个数可选，例如选 7（其他情况类似），由于 $A+H=7+5=12$，从而 $F=3$；又 $I=4$，故 $I+F=7$，从而 $E=8$；$A=7,G=6,A+G=7+6=13$，从而 $B=2$；$C=15-(B+I)=15-(2+4)=9$；最后，由于 $H=5,C=9$，因此，$D=15-(H+C)=15-(5+9)=1$。

因此，在 $G=6,H=5,I=4$ 的情形下，A,B,C,D,E,F 的值分别为：7,2,9,1,8,3 符合题目要求。

同理，在 $G=6,H=5,I=4$ 的情形下，A,B,C,D,E,F 的值亦可为：1,8,3,7,2,9 等。

两个供读者思考的问题：

(1)G,H,I 的值可否有除 4,5,6,以外的选择。

(2)△AHF,△BCI,△GDE 三个顶点的数值和不为 15 是否可以？

答案：以上两情况均不满足要求。

提示：

对于(1)可有下述必要条件：放在 G,H,I 位置上的数必须是每个数应至少可以有三种与其他数的和为 15 的形式，因此，根据我们列出的所有和为 15 的八种形式可知，只有 2,4,5,6,8 排在中间才可能满足要求，通过实验可知 2 和 8 放在中间不合要求。亦即当三角形的和为 15 时，若不考虑 G,H,I 的循环情形，满足需要的 G,H,I 是唯一的，即只有 4,5,6。对于(2)，实际上很简单，若三个三角形和不为 15，则必造成和不相等的情形，不满足题目要求。

2. 神龟背上的“洛书”

——幻方问题

(1)试证明:n 阶正规幻方的幻方常数为:$\frac{n(n^2+1)}{2}$。

(2)试作七阶正规幻方。

(3)试证明:三阶正规幻方中央一格必定被 5 占有。

【背景材料】

《易经》是我国最古老的数学经典著作之一,在这部书中有称做洛书的数学图表,后来画成右图的形式。

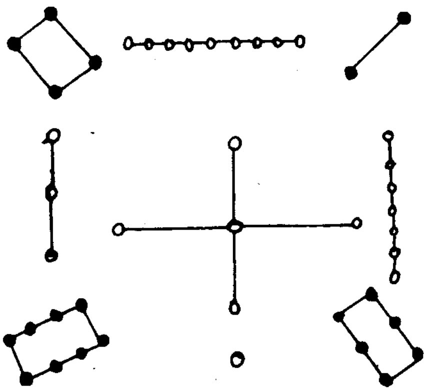


图 3

洛书是幻方的已知的最古老的例子,并且传有神话:大禹于大约公元前 2200 年首先见到装饰在黄河岸边神龟背上的洛书。右图所示的是用绳结做的数字方阵——实心点表示偶数,空心点表示奇数。

【解题方法】

(1)上图写成数字表格的形式如右：它实际上是一个三阶幻方，其每一行和每一列以及主对角线的八个和都相等，且都为 15，即：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$4+9+2=3+5+7=8+1+6$

$=4+3+8=9+5+1=2+7+6=4+5+6=8+5+2=15.$

这个相等的数 15 就称为幻方常数。

一般地一个 n 阶幻方是 n^2 个不同的整数排列成的方阵，使得沿着任何行、列和主对角线的 n 个数有相同的和，这个和称为幻方常数。如果这 n^2 个数是前 n^2 个正整数，则所构成的幻方称为正规幻方。

据此定义，我们可以证明(1)：

前 n^2 个正整数之和为： $1+2+3+\cdots\cdots+n^2$

而 n 阶正规幻方的各行(列)都相等，因此幻方常数为：

$$\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n^2}{n}=\frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{n}=\frac{n(n^2+1)}{2}$$

(2)求奇数阶正规幻方有一种简单的方法，以五阶正规幻方为例，我们来说明这种方法：

画一正方形，并分成 25 格(如右图)，在上边和右边，再加上一层格子，并把右上角所加的格子画上阴影。把

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

1 写在原来正方形上头中间的一格里。然后按一般规则进行，即沿对角线逐次在右上角一格写上相继的整数。这个规则也有两个例外的情况出现，即当这种操作超出了原正方形，或者遇到已经有了数字的一格时。对于第一种情况，或者从上边改到最底下那一格，或者从右边改到最左边那一格，并依一般规则继续进行；对于第二种情况，则把相继的后一个数直接写在前一个数的下一格，并继续进行。画上阴影的一格也看作是有了数的。

例如，在这个例子中，按一般规则，沿角线向上，2 就该放在上边第四格中。所以，把 2 放到原正方形底下那行的第四格。当进行到 4 时，它先落在右边第三格中。所以，必须把它改到原正方形第一列的第三格中。按一般规则，6 就该放在 1 已经占了的一格中。因此，就把它写在最后写下的数 5 的下面，等等。有了这个规则，我们就很容易作出七阶幻方：

	31	40	49	2	11	20	
30	39	48	1	10	19	28	30
38	47	7	9	18	27	29	38
46	6	8	17	26	35	37	46
5	14	16	25	34	36	45	5
13	15	24	33	42	44	4	13
21	23	32	41	43	3	12	21
22	31	40	49	2	11	20	

(3)设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ 分别代表 1—9 中的某一个，且 x_1—x_9 所构成的三阶正规幻方如右表：

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

则有：$x_1+x_2+x_3=15$ ……………… ①

$x_4+x_5+x_6=15$ ……………… ②

$x_7+x_8+x_9=15$ ……………… ③

$x_1+x_4+x_7=15$ ……………………………………… ④

$x_2+x_5+x_8=15$ ……………………………………… ⑤

$x_3+x_6+x_9=15$ ……………………………………… ⑥

$x_1+x_5+x_9=15$ ……………………………………… ⑦

$x_3+x_5+x_7=15$ ……………………………………… ⑧

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=45$ ……………… ⑨

②+⑤+⑦+⑧得：

$(x_4+x_5+x_6)+(x_2+x_5+x_8)+(x_1+x_5+x_9)+(x_3+x_5+x_7)=(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9)+3x_5=60$，

将(9)式化入上式得：$45+3x_5=60$

$$x_5=5$$

即三阶正规幻方中央一格必定被 5 占有。

事实上，对于奇数阶的正规幻方，其中央一格必定被 $\frac{n^2+1}{2}$ 占有（n 为阶数）。

两个供读者思考的问题：

①如何求偶数阶幻方（正规）？

②三阶正规幻方与爱因斯坦的九圆圈填数中的图形是什么关系？

3. 德·梅齐里亚克的砝码问题

一位商人有一个 40 磅的砝码，由于跌落在地而碎成 4 块。后来，称得每块碎片的重量都是整磅数，而且可以用这 4 块来称从 1 至 40 磅之间的任意整数磅的重物。

问这 4 块砝码碎片各重多少？

【背景材料】

本题是由法国数学家 G·B·德·梅齐里亚克(Gaspard Bachet de Mé ziriac)给出的(1624 年)。

【解题方法】

德·梅齐里亚克于 1624 年给出了这个问题的解法：

首先，为解此题，先给出两点说明：

①一般说来，天平的两个盘区分为砝码盘和称量盘，而且称量盘上一般不可以放砝码，本题中应打破这一规定，即是说，天平的两端均可放砝码，例如，用一块 2 磅和一块 3 磅的砝码去称一个一磅的重物，可把 2 磅的砝码放在称量盘上，而把 3 磅的砝码放在砝码盘上。

②假如有一系列砝码 A、B、C、……，把它们适当地分放在两个盘上，就能称出 1 到 n 的所有整数磅的重物。如果有一块新的砝码P，它的重量 β 超过原有砝码的重量总和 n，超过量为原砝码重量的总和加 1。