高等数学（二）

——线性代数与概率统计

（附16份历年试题讲解）

全国高等教育自学考试指导与训练

QUANGUO GAODENG JIAOYU ZIXUE KAOSHI ZHIDAO YU XUNLIAN

主编单位

复旦大学计算机科学系
上海第一电子信息应用教育中心
华东师范大学理工学院
上海电子信息应用教育中心

旦大学出版社

内容提要

《高等数学(二)——线性代数与概率统计》是全国高等教育自学考试管理工程类专业各门课程中难度较高的一门课程，它实际上是线性代数、概率论基础和数理统计初步的三合一课程．本书内容由两大部分组成，第一部分是内容提要、例题与习题，在各个章节中先列出了基本概念、结论与公式，再精选了相当数量的例题讲解，最后给出适量的练习题，并附有答案．第二部分是试题讲解．共收集了自 1992 年到 1999 年的 16 份试题．对每个考题不仅仅是给出答案，而且还作较详细讲解，并对原有试题作了勘误．本书可供计算机信息管理专业及其他相关专业的学员阅读参考，有利于掌握基本内容，提高解题能力．

《全国高等教育自学考试指导与训练》

编　委　会

本册编者　徐诚浩

前　言

高等教育自学考试制度，是我国高等学历教育体系的重要组成部分.这项制度体现了宪法规定的“鼓励自学成才”精神，每年都有数以百万计的自学者接受高等教育各专业的国家考试，直接反映着时代和社会对人才的紧迫需求，密切关系到社会主义现代化建设事业的发展进程.

高等教育自学考试计算机信息管理专业，旨在面向信息产业，培养具有现代经济管理知识，掌握计算机学科的基本理论，能应用计算机进行信息系统的分析和设计，解决经济领域中信息处理和管理问题的专门人才.随着我国国民经济信息化的推进和信息产业的发展，报考该专业的自学者人数逐年上升.

高等教育自学考试有其特殊规律，再加以计算机专业课程不仅要求有理论基础，而且要求能上机操作，因此增大了学习难度.为了帮助自学者在较短的时间内，系统把握考纲要求和教材内容，进行切实有效的基本能力训练，上海市高等教育自学考试有关办公室和有关成人高校联合组织编写了《全国高等教育自学考试指导与训练》系列书，该系列书已出版计算机信息管理专业课程备考用书，有《计算机原理》、《计算机应用基础》、《程序设计》、《高等数学(财Ⅰ)》、《高等数学(二)》和公共课《邓小平理论》共六本.

本系列书编委和撰稿者，由多年从事自学考试管理与教学工作的行家和计算机学科的教授、副教授担任.编写的原则是，贯彻全国高等教育自学考试大纲的精神，传递专业课程考试的新信息，反映自学考试特点和历年成功经验，注重给予备考的最佳战略指导，综合分析教材中的知识点而不是重复教材内容，对学习要点、解题方法和应试技巧作出提示，精心设计基本能力训练的有效途径，各册均以主要篇幅提供体系完整、层次分明、重点突出的强化训练内容，力求达到科学性、针对性和可操作性的统一，有助于自学者取得实效，提高自学考试的合格率.同时，全书有富于创意的结构和简明扼要的表述.

全国高等教育自学考试管理工程类专业《高等数学(二)》这门课程的特点是，所牵涉到的概念较抽象，且公式繁多，自学难度较大.在本书中将归纳本课程的重点内容与公式，介绍基本方法，用例题化解难点，并配以适量的自测训练题.编写宗旨是指导学生如何掌握课程基本内容与方法，提高应试能力.

本书内容由两大部分组成.第一部分是各章节内容提要、例题与习题.在列举了基本概念、结论与公式之后，再精选了相当数量的具代表性的例题并作讲解，在各章节末还给出一些自测习题，并附有答案.第二部分是历年度本课程的试题汇编，并作简要讲解，增加学生对试题的感性认识，了解知识点分布和分量，谅能收到实效.

恳请参加高等教育自学考试的广大自学者和其他读者，对本系列书提出意见和建议，使之在今后的改版中臻于完善.

《全国高等教育自学考试指导与训练》编委会

2000年4月

编者的话

全国高等教育自学考试课程《高等数学(二)》是管理工程类专业的诸课程中难度较高的一门课程.为了指导学生如何学好指定教材(见参考书目[1],[2]),编者已编写了一本指导性教材(见参考书目[3]).该指导性教材遵循由浅入深、由易到难,从具体到抽象,从特殊到一般的编写原则,及时用实例化解难点,弄清概念,并配有大量典型例题予以讲解.这在一定程度上减少了教学的困难.但限于篇幅,对于本课程的历次考题和指定教材中的大量习题,未能作全面讲解,更没有给出必要的习题,缺少了自测练习这一重要学习环节.为求完善起见,特配套编写本书.

所谓指导主要指的是学习方法的指导.学习本课程的主要困难有两方面:其一是概念较抽象,其二是公式繁而多.学习的重点应放在对概念的正确理解和熟练运用上,善于对各种概念举出正例和反例.解题的技巧主要来源于对概念的透彻理解.忽视概念而一味追求漂亮的解题技巧是一种华而不实的学习方法.另外,盲目地阅读大量题解,而忽视对概念的理解和自测训练,这种本末倒置的学习方法,必将导致被题海所淹没的境地.题目看了不少,但稍有变化,就束手无策.每个人的精力和时间是非常有限的,但题目却是无限的.面对题海常会因产生恐惧心理而丧失学习信心.解题必须要学会举一反三,而不能机械地生搬硬套.在参考书目[3]的第三部分列入了"总复习",在本书的每一章节的第一部分都列出了"基本概念、结论与公式",都是希望读者对基本内容要给予高度重视.对于繁多的结论与公式,也不能单纯死记硬背,只有在透彻理解的基础上,对照比较各种相关结论和公式之间的区别和联系,并通过阅读例题和自做习题去加深理解,才会熟能生巧,举一反三!

面对广袤题海,最有实效的方法是分析研究本课程的历次试题.其中不但展示了所需的知识点及其分布,而且还有利于辨清有关概念和结论,且这与试卷的年度无多大关系.在本书的第二部分中,对1992年至1999年的16份本课程试卷中的全部试题都作了讲解和分析.对正确的结论给予简洁证明;对错误的结论举出反例或说明理由.对原有试题和标准答案中的各种类型的错误和不当之处都一一予以改正,确保命题的科学性.在这些试题中再精选出部分试题的年份和题号列举在有关章节处,供读者选做.希望能先做后看,以求实效.

随着本课程考试次数的不断增加,在题目类型和试题所涉及的范围方面,都已有较大改变.鉴于这一新情况,在本书中精选了一些较具特色的例题和习题,供读者参考.打*的题目稍具难度.学数学必须做足够的习题,而且必须要在掌握有关内容的前提下,再去独立完成,光看不做是收效甚微的,所附答案仅供查对之用.

上海理工大学刘宁同志和温州师范大学的李启敏同志为本书的编写提供了大量的题目和宝贵意见,责任编辑秦金妹同志认真负责地为本书的出版付出了辛勤劳动,在此,表示衷心感谢.编者虽已尽力而为,但限于水平和能力,难免有不理想,甚至错误之处,恳请同行和读者批评指正.

徐诚浩

2000年4月

目　　录

第一部分　内容提要、例题与习题

第二部分　试 题 讲 解

第一部分　内容提要、例题与习题

第一章　行列式与矩阵

§1　行　列　式

一　基本概念、结论与公式

1. 定义与性质

由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$ 组成 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{aligned} &=\sum_{n!}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad (1\leqslant i\leqslant n) \\ &=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad (1\leqslant j\leqslant n) \end{aligned}$$

这里，$N(j_1j_2\cdots j_n)$是 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序总个数. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij}和 A_{ij}分别是 a_{ij} 在 D_n中的余子式和代数余子式.

行列式经转置，其值不变. 互换两行(列)，其值改号. 可逐行(列)提出公因数. 可逐行(列)拆开. 把某行(列)的倍数加到另一行(列)上去，其值不变.

2. 计算方法与公式

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & * & & a_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ * & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & * & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\prod_{i=1}^{n}a_i$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ & \cdots\cdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),\quad \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ & \cdots\cdots & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)$$

当 A 为可逆方阵时，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\cdot|D - CA^{-1}B|$.

常用的方法是利用行列式性质化为易求值的行列式求值，或者选含零最多的行或列展开降阶求值.

3. 对 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 有拉普拉斯展开定理：

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{it} = \begin{cases} D, & 若\ j = t \\ 0, & 若\ j \neq t \end{cases},\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{lj} = \begin{cases} D, & 若\ i = l \\ 0, & 若\ i \neq l \end{cases}$$

据此可导出作为线性方程组求解理论基础的克莱姆法则：当 A 为 n 阶可逆阵时，非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 必有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

这里，$D = |A|$，D_j 为将 $|A|$ 中第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 后所成的 n 阶行列式. 因而，当 $|A| \neq 0$ 时，齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ 只有零解.

二 例题

1. $$\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a+c & a+c & b+d & b+d \\ a+c & a+c & b+d & b+d \end{vmatrix} = 0$$

2. $$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ a_3-a_1 & a_3-a_1 & a_3-a_1 \end{vmatrix} = 0$$

3. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

4. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= 0 \Longleftrightarrow x = 0\ 或\ 1\ 或\ 2$$

5. $$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1\,024 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} \\ (1)\quad (-1)\qquad \end{array} = \begin{vmatrix} 1\,000 & 100 & 327 \\ 2\,000 & 100 & 443 \\ 1\,000 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 10^5 \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 2 & 1 & 443 \\ 1 & 1 & 621 \end{vmatrix} \\ (-1)\qquad \end{array}$$

$$= 10^5\begin{vmatrix}1 & 0 & 327\\ 2 & -1 & 443\\ 1 & 0 & 621\end{vmatrix} = -10^5(621-327)$$

$$= -294 \times 10^5$$

6. $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\begin{matrix}(1)\\(1)\\(1)\\ \end{matrix} = 10\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix}-3 & -2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

(-1) (-2) (1)

$$= 10\begin{vmatrix}4 & -4\\ 0 & 4\end{vmatrix} = 160$$

7. $$\begin{vmatrix}x & a & a & a & a\\ a & x & a & a & a\\ a & a & x & a & a\\ a & a & a & x & a\\ a & a & a & a & x\end{vmatrix} = (x+4a)\begin{vmatrix}1 & a & a & a & a\\ 1 & x & a & a & a\\ 1 & a & x & a & a\\ 1 & a & a & x & a\\ 1 & a & a & a & x\end{vmatrix}(-1) = (x+4a)(x-a)^4$$

$(1)\ (1)\ (1)\ (1)$

8. $$\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & 0\\ 0 & 0 & x & -1\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3+x\end{vmatrix} = (a_3+x)\begin{vmatrix}x & -1 & 0\\ 0 & x & -1\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}x & -1 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$+ a_1\begin{vmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & x & -1\end{vmatrix} - a_0\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4$$

9. $$\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \\(-1)\\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ -x & -x & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 0 & 0 & -y & -y\end{vmatrix}$$

(-1) (-1)

$$= \begin{vmatrix}1+x & -x & 1 & 0\\ -x & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1+y & -y\\ 0 & 0 & -y & 0\end{vmatrix}$$

$$= x^2y^2$$

10. $$\begin{array}{c}\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \quad & (1) & (1) & (1) \end{matrix}\end{array} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4a_1a_2a_3$$

11. $$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} (-1) \\ \\ (1) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-3-2+3) = 4$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = -2 \times 12 = -24$$

其中

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D - CA^{-1}B = D - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}B = D - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$|D - CA^{-1}B| = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = 27 - 15 = 12$$

13. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是 $n-1$ 个互不相同的数，证明

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ & & \cdots\cdots & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

是 x 的 $n-1$ 次多项式，并求出 $f(x)=0$ 的 $n-1$ 个根.

解　x^{n-1} 的系数是 $(-1)^{n+1}V_{n-1}$，其中 V_{n-1} 是关于 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的 $n-1$ 阶范达蒙行列式，由 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 两两互异知 $V_{n-1} \neq 0$. 所以，$f(x)=0$ 的 $n-1$ 个根为 $x = a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$.

14. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ & \cdots\cdots & & \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}[(a-i)-(a-j)]$$

$$= \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)$$

三　有关试题精选

92(下)二/8[①]，六/1；93(上)二/6，五/1；93(下)二/2，六/2；94(上)一/1，二/1，四/1；94(下)二/7；95(上)二/1；95(下)一/3，二/5；97(下)一/3，一/4；98(上)一/2；98(下)一/1，一/2；99(下)一/2.

四　习题 1.1

1. 计算如下二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 34.215 & 35.215 \\ 28.092 & 29.092 \end{vmatrix}$

2. 设三个三位数 $a_1a_2a_3$，$b_1b_2b_3$，$c_1c_2c_3$ 都是 d 的整数倍，则三阶行列式 $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 必是 d 的整数倍. 为什么？

3. 求 x 的四次方程 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$ 的所有根.

4. 求出以下诸行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$.

① 表示 1992 年下半年第二大题第 8 小题. 全书都用此记号表示所选试题的年度和题号.

(7) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} a_2+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_2+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_2+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & b & a_1 \\ a_3 & a_3 & a_3 & b \end{vmatrix}$ (10) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$

§2 矩　　阵

一　基本概念、结论与公式

1. 矩阵运算(注意可运算条件)

$(a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}$

$k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为数

$((a_{ij})_{m\times n})' = (b_{ij})_{n\times m}$，其中 $b_{ij} = a_{ji}$，$i = 1, 2, \cdots, n$；$j = 1, 2, \cdots, m$

$(a_{ij})_{m\times k} \cdot (b_{ij})_{k\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$，其中

$c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}$，$i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, n$

n 阶方阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B 使 $AB = I_n \Longleftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B 使 $BA = I_n$.

2. 矩阵运算法则(满足运算条件)

$A + B = B + A$，$(A + B) + C = A + (B + C)$，$A + B = A + C \Longleftrightarrow B = C$

$kA = Ak$，$(kl)A = k(lA)$，$k(A + B) = kA + kB$，$(k + l)A = kA + lA$

$(A \pm B)' = A' \pm B'$，$(kA)' = kA'$，$(AB)' = B'A'$

$(AB)C = A(BC)$，$(A \pm B)C = AC \pm BC$，$A(B \pm C) = AB \pm AC$

$k(AB) = (kA)B = A(kB)$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，$(A')^{-1} = (A^{-1})'$，$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$　$(k \neq 0)$

3. 常用特殊方阵

对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$，单位阵 $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$，纯量阵 aI_n

三角阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则

A 为对称阵 $\Longleftrightarrow A'=A \Longleftrightarrow a_{ij}=a_{ji},\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

A 为反对称阵 $\Longleftrightarrow A'=-A \Longleftrightarrow a_{ij}=-a_{ji},\ a_{ii}=0,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

A 为正交阵 $\Longleftrightarrow AA'=I_n \Longleftrightarrow A'A=I_n$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\text{且}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{lj}=0,\ 1\leqslant i\neq l\leqslant n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\text{且}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}a_{il}=0,\ 1\leqslant j\neq l\leqslant n$$

A 为幂等阵 $\Longleftrightarrow A^2=A$. 此时必有 $A^m=A$, m 为任何正整数.

A 为幂零阵 $\Longleftrightarrow$ 存在正整数 m 使 $A^m=O$.

A 为幂幺阵 $\Longleftrightarrow$ 存在正整数 m 使 $A^m=I_n$.

A 为对合阵 $\Longleftrightarrow A^2=I_n$. 此时必有 $A^{2m}=I_n$, $A^{2m+1}=A$.

若 A 是 n 阶方阵，则对任一 m 次多项式

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

可产生 A 的方阵多项式

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I_n$$

4. 常用结论与公式

(1) 三角阵的行列式即为其全体对角元之积. $|aI_n|=a^n$. $|I_n|=1$.

(2) 若 A 是 n 阶阵，则对任意数 k 有 $|kA|=k^n|A|$.

(3) 奇数阶反对称行列式必为零.

(4) 矩阵相乘不满足交换律和消去律. 当 $AB=BA$ 时才有

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2,\ A^2-B^2=(A+B)(A-B),\ (AB)^k=A^kB^k$$

由 $AB=AC$ 和 $A\neq O$ 不能推出 $B=C$. 由 $A^2=B^2$ 不能推出 $(A+B)(A-B)=O$ 和 $A=\pm B$.

同阶对称阵 A 与 B 之积 AB 是对称阵 $\Longleftrightarrow AB=BA$.

同阶反对称阵 A 与 B 之积 AB 是反对称阵 $\Longleftrightarrow AB=-BA$.

(5) 行列式乘法规则. $|AB|=|A|\cdot|B|=|BA|$.

(6) 对任一 $m\times n$ 实阵 $A=(a_{ij})$ 都可产生格兰姆方阵 AA' 和 $A'A=A'(A')'$，它们分别为 m 阶和 n 阶对称阵，且 AA' 和 $A'A$ 的全体对角元之和都是 A 中所有元素的平方和 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$. 因而，$AA'=O \Longleftrightarrow A=O \Longleftrightarrow A'A=O$. 特别，当 A 为 n 阶正交阵时，其所有元素的平方和必为 n.

(7) 可逆阵可从矩阵等式的同侧消去. 当 P 是 n 阶可逆阵时, n 阶阵 A 是对称阵 $\Longleftrightarrow$ $P'AP$是对称阵.

(8) 设 A^* 是 n 阶阵 A 的伴随阵, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 且有 $AA^* = A^*A = |A|I_n$. 当 $|A| \neq 0$ 时, 有求逆公式

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

当 $n \geqslant 4$ 时, 不宜用此公式求逆阵.

(9) 可逆上(下)三角阵的逆阵仍是可逆上(下)三角阵.

5. 分块阵及其运算

(1) $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的行向量与列向量表示分别为

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},\ \begin{array}{l} \boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{array}$$

$$A = (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n),\ \boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

(2) 准三角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_r \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ * & A_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

中所有主对角块 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_r$ 都必须是方阵. 此时, $|A| = \prod\limits_{i=1}^{r} |A_i|$, 故 $|A| \neq 0 \Longleftrightarrow |A_i| \neq 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r$.

(3) 分块阵 $A = (A_{ij})_{r\times s}$ 的转置阵为 $A' = (A'_{ji})_{s\times r}$.

(4) 设 A 为 $m \times k$ 阵, B 为 $k \times n$ 阵, 则

$$AB = A(\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n) = (A\boldsymbol{\beta}_1 \quad A\boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad A\boldsymbol{\beta}_n)$$

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 B \\ \boldsymbol{\alpha}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m B \end{pmatrix}$$

(5) 特殊分块阵求逆公式

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{pmatrix}$$

6. 初等变换与初等方阵

(1) 三类初等变换. 互换 A 的某两行(列);用非零数 k 乘 A 的某一行(列);把 A 中某一行(列)的倍数加到另一行(列)上去. 对矩阵施行初等变换是变换过程,前后必须用$\longrightarrow$连接,且不必改号和乘数 k. 这与行列式求值有本质不同.

(2) 三类 n 阶初等方阵

$$\underset{(i\neq j)}{P_{ij}} = \begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & I_s & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I_t \end{pmatrix}, D_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, k \neq 0$$

$$\underset{(i<j)}{T_{ij}(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & k & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \underset{(i>j)}{T_{ij}(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & k & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

满足 $|P_{ij}| = -1$, $|D_i(k)| = k$, $|T_{ij}(k)| = 1$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $D_i(k)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{k}\right)$, $T_{ij}(k)^{-1} = T_{ij}(-k)$.

(3) 对矩阵 A 施行初等行(列)变换就是用同类初等阵左(右)乘 A. 若 A 经过若干次初等变换后变成 B,则称 A 与 B 等价. 矩阵之间的等价关系具有反身性、对称性和传递性. 对任一 $m \times n$ 阵 A,必存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

称为 A 的等价标准形,这里 P 和 Q 分别是若干个 m 阶和 n 阶初等方阵的乘积,r 由 A 唯一确定(就是 A 的秩).

(4) n 阶阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 等价于 n 阶单位阵 $\Longleftrightarrow$ A 可表为若干个 n 阶初等阵之积 $\Longleftrightarrow$ A 可经若干次初等行(列)变换变成单位阵.

限用初等行变换求方阵 A 的逆阵公式:

$$P(A \quad I_n) = (I_n \quad A^{-1})$$

即对 $n \times (2n)$ 阵 $(A \quad I_n)$,限用初等行变换,把前 n 列变成 I_n,则后 n 列必是所求的 A 的逆阵.

二 例题

1. (矩阵乘法)设 A 是 n 阶方阵. 如果对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 都有 $A\boldsymbol{x} = \theta$,证明 $A = O$.

证　取 x 为标准 n 维单位列向量 $\varepsilon_j=(0\cdots\underset{(j)}{1}\cdots0)'$. 由 $A\varepsilon_j=\theta$ 知 A 的第 j 个列向量为 θ. 取遍 $j=1,2,\cdots,n$, 即证得 $A=O$.

2. (交换性)求出与以下方阵 A 可交换的方阵的一般形状.

(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 两两互异

解　(1) 设

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则
$$\begin{pmatrix}a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_1&b_1\\0&a_2&b_2\\0&a_3&b_3\end{pmatrix}\quad \text{即}\quad \begin{aligned}&a_2=a_3=b_3=0\\&c_3=b_2=a_1\\&c_2=b_1\end{aligned}$$

故与 A 可交换的三阶方阵为 $\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$.

(2) 设 $X=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $AX=XA$. 关注矩阵等式两边的 (i,j) 元素, 由

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda_i&&\\&&&\ddots&\\&&&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots&a_{1j}&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&a_{ij}&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&a_{nj}&\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdots\cdots\\a_{i1}\cdots a_{ij}\cdots a_{in}\\\cdots\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda_j&&\\&&&\ddots&\\&&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

得 $\lambda_i a_{ij}=a_{ij}\lambda_j$. 因为当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\neq\lambda_j$, 必有 $a_{ij}=0$, 所以, X 必为对角阵. 两个同阶对角阵必可交换.

3. (方阵多项式)设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x-3$, 求 $f(A)$.

解　$f(A)=A^2-2A-3I_3$

$$=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&2&4\\11&2&5\\-1&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2&2\\6&2&4\\2&-2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\5&-4&1\\-3&2&-4\end{pmatrix}$$