线性代数

徐军民　刘义循

兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数:物理学/徐军民主编 .—修订本—兰州:
兰州大学出版社,2001.9
ISBN 7-311-00993-6

Ⅰ.线... Ⅱ.徐... Ⅲ.线性代数—高等学校—教
材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 061728 号

线性代数

徐军民 刘义循

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路 308 号 电话:8617156 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州人民印刷厂印刷

开本:850×1168 1/32 印张:10.875

2001 年 9 月第 2 版 2002 年 9 月第 2 次印刷

字数:272 千字 印数:3001~5000 册

ISBN7-311-00993-6/O·122 定价:16.00 元

在数学中，有比我们通常承认的更为形而上学的真理.

[德]Leibniz(1646～1716)

代数是慷慨的，它提供给你的常常比你要求的还多.

[法]D'Alembert(1717～1783)

逻辑可以等待，因为它是永恒的.

[英]Heaviside(1850～1925)

代数是搞清楚世界上数量关系的智力工具.

[英]A·N·Whitehead(1861～1947)

这就是结构好的语言的好处，它的简化的记法常常是深奥理论的源泉.

[法]Laplace(1749～1827)

前　言

事实上,我们人类生活在模型世界之中.为了理解周围的世界,人们总是把自己的观察及思想组织成概念的体系,我们把这些概念的体系称为模型.把逻辑应用于模型的概念而得到的见解称为理论."线性空间"是涉及代数、分析与几何的某些方面的一个模型,它的理论就是线性代数.数学模型之不同于物理模型,就在于构成它们的"现实世界"的是数学对象,而不是那些存在于客观世界中的东西.这就给人们惯常于非常具体地思考问题的思维方法造成困难.为此,本书注意到以下几点:

第一,"虽然行列式和矩阵在19世纪受到了很大的关注,而且有了成千篇关于这两个课题的文章,但它们在数学上并不是很大的改革.……因此,虽然从表面上看,数学不过是一种语言或速记,但它的大多数生动的概念能对新的思想领域提供钥匙.相反地,行列式和矩阵却完全是语言上的改革.对于已经以较扩展的形式存在的概念,它们是速记的表达式.它们本身不能直接说出方程或变换所没有说出的任何东西,……尽管行列式和矩阵用作紧凑的表达式,……但它们没有深刻地影响数学的进程.然而已经证明这两个概念是高度有用的工具,现在是数学器具的一部分."((美)M·克莱因《古今数学思想》第3册,第197页)拉普拉斯曾说:"……这就是结构好的语言的好处,它的简化的矩阵记法常常是深奥理论的源泉."本书大大突出了矩阵的这种工具的作用,并贯穿于全书.

第二,一般认为欧几里得几何、解析几何、线性方程组等是线性代数的三个来源.到了19世纪中期,线性方程组则成为线性代

数的原始课题，而矩阵、线性变换以及二次型成为线性代数的主角.甚至可以说“线性代数是线性空间以及线性空间之间的线性映射的理论.”但传统的教材使学生往往对线性空间、线性变换印象淡漠，原因之一是教材本身未突出此部分内容.本书着意把向量空间(线性空间)提前到第三章，让它“提前亮相”以示强调.

第三，与其他数学分支相比，线性代数凸显出离散、有限、形式逻辑、公理化思想等特点，可以说它是一门“截面科学”.突出的表现是概念多、符号多、计算量大.所以容易做成是定理的罗列或公式的堆积，给人的印象是一串由数学符号和字母构成的“符号语言体系”，淹没了概念的作用.故本书也注意了这个问题，并提请读者在学这门课时尤其要重视每个概念.

第四，书末给出了大部分习题的答案或提示，绝不是让学生去“坐享其成”，不费力气地去学习的.原因是代数也可以说是计算的数学模型，一个道理并不复杂的问题往往计算量很大，加上学时的限制，所以我们想让学生把较多的精力放在逻辑的辨析和思想的领悟上.请仔细咀嚼扉页上几位大师的话！

第五，我们认为，教材并不是唯“教”是从，书本多一点必要的知识，即使教师不去讲，对学生(读者)也并无坏处.本书的第七、八两章以及附录就是本着这种目的而写的.如果学时允许的话，第七、八章也是很有必要讲授的.本书适于总学时为60学时左右的专业一学期使用.

总之，当今的“代数”，可以说是讨论或多或少的形式的数学运算和关系的科学(相对于大约一百多年以前代数只是“方程的理论”而言).对于初学的人，如果几何学及代数计算的基础不扎实，而且对于“抽象”也感到困难，那么他们学习线性代数的条件就显得不太成熟.所以，除了在此提请读者注意之外，教材里的有关部分也给了相应的提示：第三、六章适当地突出了几何的思想(虽然本书未刻意追求代数与几何的类比)；虽然方程组是“原始课题”，

但它在提出问题、描述问题、理解问题方面具有独到之处，特别是“把一个方程的倍数加到另外一个方程使方程组变成一个同解方程组”这个极其简明的事实，用矩阵的初等变换及“秩”这个概念来体味线性代数的实质，的确可以达到纲举目张、事半功倍的效果．这就是本书第四章的目的．

也无须过分地夸大困难．“不识庐山真面目，只缘身在此山中”，只要在学习过程中，随时从课本中走出来，居高临下、高屋见瓴地去审视一下全课程，就会发现线性代数的理论并不复杂，定理也不是很多，也没有复杂冗长的证明．即使是本书比较抽象的第五章，当学完了第六章再回头来理解它就显得不是那么费力了．

本书的例题、习题共计近300道(不计小题)，且有的题目具有一定的深度．目的不外乎是对教材内容的熟练、加深与拓广．由于题目的选择性较活，所以便于学生随意选作．

兰州大学教务处对本教材的编写给予了关心和资助．兰州大学出版社的领导及编辑也给予了大力支持．笔者在此一并向他们表示衷心的感谢！

由于笔者水平和能力所限，本书一定有不少谬误之处，敬请读者不吝指教．

徐军民

2001年3月于兰大二分部春虫书屋

内容简介

本书为综合性大学非数学专业本科生(物理类)教材.全书共八章,内容包括:矩阵、行列式、向量空间、矩阵的秩与线性方程组、线性变换与矩阵的可对角化、欧几里得空间与实二次型、群介绍、应用.在书末还附有 Jordan 标准形简介和代数发展史简介.本书体系独特,阐述简明扼要,突出公理思想,强调方法训练,因而也可供其他专业用作教材或参考书.

目　　录

第一章　矩阵

从函数的观点来看，线性代数学是以线性函数和它们的集合的理论为研究对象的．而矩阵在提出与解决线性代数的问题中起着工具的作用，因此，矩阵概念及其基本理论是线性代数中首要的不可缺少的组成部分．

§1　矩阵概念的引入

这一节里，我们由各种不同的实际问题来引出矩阵概念，同时，我们还会从中发现矩阵的一些应用．

例 1　设某三个不同的副食商场 S_1、S_2、S_3 供应四种不同价格(单位:元)的罐头食品 F_1、F_2、F_3、F_4，如下表所示：

表 1

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	17	7	11	21
S_2	15	9	13	19
S_3	18	8	15	19

在商场 S_1 要把每种罐头各买一瓶总共需花费 $17+7+11+21=56$(元)，同样地，在 S_2、S_3 要分别花费 56 元与 60 元．

表 1 中数字的长方形数表就叫做矩阵，这里分别有 3 行和 4 列．像这样的一个排列总是发生在两个集合(上例中是食品和副食商场)的元素通过一个数字集合(上例中是价格)相联接的时候．

例 2　表 2 中给出了甲、乙、丙、丁四个城市之间的距离(千

米).

表 2

	甲	乙	丙	丁
甲	0	841	2212	704
乙	841	0	3033	224
丙	2212	3033	0	2835
丁	704	224	2835	0

我们注意到,这个数表中的行和列具有相同的数目,故被称作正方矩阵.零元素所在的那条线叫做这个矩阵的主对角线.同时,也注意到阵列中的数字是关于这条主对角线对称的.以后我们将看到如此的对称矩阵具有一些有趣的性质.

例 3 图 1 是一个网,表示第一个国家的机场 A_1、A_2 与第二个国家的机场 B_1、B_2、B_3 之间的航空路线.每一连线上的数字给出了相应机场之间的飞行里程(千千米).用列表的形式表示成

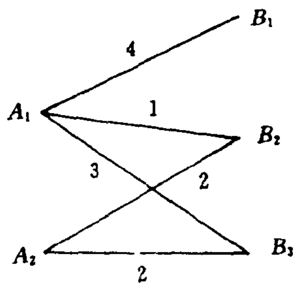

图 1

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

这里,把这个数表用圆括号括起来,也是矩阵的一种表示符号.

例 4 电流 i_1、i_2、i_3 在电路中可以表示成图 2 的样子,且满足方程组

$$\begin{cases}(R_1+R_4+R_5)i_1-R_4i_2-R_5i_3=E_1\\-R_4i_1+(R_2+R_4+R_6)i_2-R_6i_3=E_2\\-R_5i_1-R_6i_2+(R_3+R_5+R_6)i_3=E_3\end{cases}\tag{2}$$

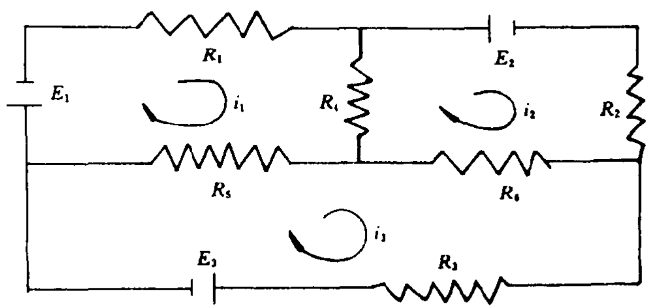

图 2

(2) 中，作为三个未知量要求解的是 i_1、i_2、i_3，其余参数的值为已知.(2) 的关系能够以一个更加简明的方式用矩阵表示如下：

$$\begin{pmatrix}R_1+R_4+R_5 & -R_4 & -R_5\\-R_4 & R_2+R_4+R_6 & -R_6\\-R_5 & -R_6 & R_3+R_5+R_6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{pmatrix}\tag{3}$$

这里，我们把(3)仅仅看作是(2)的一种写法，它的优越性就在于把系数和未知数分离开来，这样，不但节省符号，而且便于研究.这一点，我们将会逐渐体会到.因为，作为线性代数的主要研究对象的形如(2)的这种线性方程组，其性质只依赖于系数的数值.所以，我们可以通过对系数(矩阵)的研究来研究线性方程组.由此看出，从线性代数的对象本身自然引起研究矩阵的必要性.

例 5 设 P 是笛卡儿坐标 x_1、x_2 的平面上的一点，O 为原点.设 OP 绕 O 逆时针方向旋转一个角 θ，由 P 变到 $P_1'(x_1',x_2')$.如图 3(a)、(b) 所示.

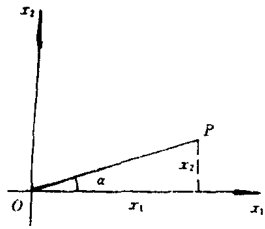

图 3(a)

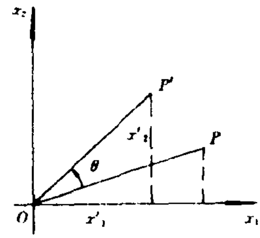

图 3(b)

因为 $OP = OP' = r$,所以我们有

$$x_1 = r\cos\alpha, \qquad x_2 = r\sin\alpha$$

以及

$$x_1' = r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$
$$= (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2$$
$$x_2' = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2$$

写成矩阵的形式就是

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

这是一个由坐标 x_1, x_2 向坐标 x_1', x_2' 的变换(或映射)的例子,这在几何学中是很有用处的.

为了从上述实例得到矩阵概念的一般数学描述,我们还必须引入数域的概念.

定义 1 设 K 是一个含有 0 与 1 的数集.如果 K 中任意两个数的和、差、积、商(除数不能为零)仍然是 K 中的数,那么,就称 K 为一个**数域**.

显然,全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域,分别就叫做**有理数域**、**实数域**和**复数域**.我们常用 Q、R、C 来分别表示这三个数域.全体整数组成的集合不是一个数域,因为任意两个整数的商不一定是整数.

下面给出矩阵的定义：

定义 2 把 mn 个数域 K 中的数 a_{ij} 排成长方形数表所得到的

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做数域 K 上的一个 m **行** n **列矩阵**，或 $m \times n$ **矩阵**，简记作 $A = (a_{ij})$，a_{ij} 叫做 A 的 (i,j) **元素**. 矩阵的横排叫做**行**，纵排叫做**列**. 从上往下数称为第 1 行，第 2 行，…；从左往右数称为第 1 列，第 2 列，… .

实数域上的矩阵叫**实矩阵**，复数域上的矩阵叫**复矩阵**. 以下讲到矩阵时，如果没有说明，一般都指某个数域 K 上的矩阵.

当 $m = n$ 时，$n \times n$ 矩阵叫做 n **阶方阵**. n 阶方阵中，由 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 所构成的对角线叫**主对角线**，其中的元素叫**对角元素**.

事实上，对于一般的 $m \times n$ 型矩阵 A，若记 $k = \min(m,n)$，则称元 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{kk}$ 构成 A 的(主)对角线，并称 a_{ii} 为 A 的第 i 个对角线元.

一阶方阵 $A = (a)$ 和 a 一样看待.

$1 \times n$ 矩阵叫做 n **维行向量**；$m \times 1$ 矩阵叫做 m **维列向量**. 特别地，由 A 的行作成的

$a_i' = (a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in})(i = 1,2,\cdots,m)$ 叫 A 的行向量；由 A 的列作成的

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j = 1,2,\cdots,n)$$

叫 A 的列向量. 用这些可以把矩阵 A 表示成

$$A = \begin{pmatrix} a_1{}' \\ a_2{}' \\ \vdots \\ a_m{}' \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

并分别叫做 A 的**行向量表示**和**列向量表示**.

§2　矩阵的运算

数域 K 上全部 $m \times n$ 矩阵记作 $K^{m \times n}$. 矩阵运算的实质就是把 $K^{m \times n}$ 中的矩阵当作一个"量"来进行运算,使普通数的运算得到很大扩充;而矩阵之间的基本运算又是由线性方程组之间的运算自然地导出的.

(Ⅰ)矩阵的相等　$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 同为 $m \times n$ 矩阵,且 $a_{ij} = b_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$ 时,称 A 和 B 为**相等的**. 记作 $A = B$.

(Ⅱ)矩阵的加法　对于 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, 规定 A 和 B 的和为

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

这时,下列式子成立:

(1)$A + B = B + A$　　(交换律)

(2)$(A + B) + C = A + (B + C)$　　(结合律)

(3)$A + 0 = 0 + A = A$　　(零元存在)

像这样,对所有 A 成立的 0 存在(只有一个),它是全部元素为 0 的 $m \times n$ 矩阵,叫做**零矩阵**. 有时也形式地写作 $0_{m \times n}$.

(4)$A + X = 0 = X + A$　　(负元存在)

这样的 X 对于各个 A 是唯一存在的,就是 $X = (-a_{ij})$,且把这个 X 表示成 $-A$. 由此, $A + (-A) = A - A = 0, A + (-B)$ 就写

作$A-B$：

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$$

（Ⅲ）数乘矩阵　设 a 为一个数，规定

$$aA=(aa_{ij})=Aa$$

这时，下列式子成立：

(5) $a(A+B)=aA+aB$

(6) $(a+b)A=aA+bA$

(7) $a(bA)=(ab)A$

(8) $1\cdot A=A$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix}=(a_1\ a_2\cdots a_n),B=\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix}=(b_1\ b_2\cdots b_n),$$

则有

$$A+B=\begin{pmatrix} a_1'+b_1' \\ a_2'+b_2' \\ \vdots \\ a_m'+b_m' \end{pmatrix}=(a_1+b_1\ a_2+b_2\cdots a_n+b_n),$$

$$aA=\begin{pmatrix} aa_1' \\ aa_2' \\ \vdots \\ aa_m' \end{pmatrix}=(aa_1\ aa_2\cdots aa_n).$$

例 1　已知

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

计算 $2A-B+3C$.

解　根据矩阵加法与数乘矩阵的定义有

$$2A-B+3C=\begin{pmatrix}8&-2&2\\6&0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&12&15\\0&-9&6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}9&9&18\\4&-12&6\end{pmatrix}.$$

命题 1　若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则对数 α 有

(1)$0A=0$

(2)$\alpha 0=0$

(3)$(-\alpha)A=-(\alpha A)=\alpha(-A)$

(4)$\alpha A=0$ 成立时，必有 $\alpha=0$ 或 $A=0$.

证明　我们只证明(4)，其余可仿此进行.

设 $A=(a_{ij})$，则由 $\alpha A=0$ 得出

$\alpha a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$. 于是，$\alpha=0$，或者 $a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$，即 $A=0$.

(Ⅳ)　矩阵的乘法　设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 为 $n\times l$ 矩阵. 对于

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

和

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1j}&\cdots&b_{1l}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2j}&\cdots&b_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nj}&\cdots&b_{nl}\end{pmatrix},$$

由