中专工科通用教材教学参考书

数学习题解集

第四册

株洲铁路电机学校数学教研组解

航空工业出版社

中专工科通用教材教学参考书

数学习题解集

第四册

株洲铁路电机学校数学教研组　解

航空工业出版社

1988

内 容 提 要

本套《习题解集》是工科中专数学教材编写组编、上海市中专数学教材编写组修订的中等专业学校教材工科专业通用《数学》第一、二、三、四册（高等教育出版社出版，1986年3月第2版）的习题的全解。它共有3132题，包含了代数、三角、立几、解几、微积分、微分方程、级数、行列式、矩阵与线性方程组、拉氏变换、概率、数理统计方面的习题和各类中专数学教材中的基本习题。它既适合招收初、高中毕业生的工科中专师生参考，也适合招收初、高中毕业生的其它各类中专、职工中专、函授中专的师生、自学中专数学者参考。

中专工科通用教材教学参考书

数学习题解集

第四册

株洲铁路电机学校数学教研组 解

航空工业出版社出版发行
（北京市和平里小关东里14号）
全国各地新华书店经销
湖南师范大学印刷厂印刷

1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷
787×1092毫米1/32　印张：13
印数：1—10000　字数：304千字
ISBN 7—80046—107—6/G·010
定价：3.50元

说　明

本套《习题解集》是工科中专数学教材编写组编、上海市中专数学教材编写组修订的中等专业学校教材工科专业通用《数学》第一、二、三、四册（高等教育出版社出版，1986年3月第2版）的习题的全解。

本套《习题解集》的前身，是它的油印本。油印本内部发行后，受到广大中专数学教师、学习中专数学者的欢迎和好评，既纷纷要求购买、出版，又诚挚地为油印本的修订提出了宝贵的意见。为了不负众望，方决心认真修订，出版。但由于水平所限，时间仓促，错漏一定不少，恳请广大读者批评，指正。

全套《习题解集》共3132题，均由株洲铁路电机学校数学教研组的教师演解，修订。第一册的第一、二、三、四、五、六章，第三册的第十四章，第四册的第二十一章的习题（共1138题）由万权科解，第二册，第三册的第十五、十六章的习题（共762题）由唐本善解，第一册的第七、八章，第三册的习题19——7至复习题十九，第四册的习题22——1至习题22——9的习题（共435题）由屈宏香解，第三册的第十七、二十章，第四册的复习题二十二、第二十四章的习题（共408题）由张伟明解，第三册的第十八章，第四册的第二十三章的习题（共269题）由黄晓津解；第三册的习题19——1至19——6的习题（共72题）由蒋明瑞解，第四册的第二十五

章的习题（共48题）由廖桢卿解；第一、三、四册的大部份图形由黄晓津绘制；发稿前，段亚东对稿件进行了检校。教研组长万权科是本套《习题解集》的组织者。

全套《习题解集》由湖南师范大学数学系副主任李求来副教授主审，由湖南省中专数学教研会理事长、省化学工业学校副校长彭仲武高级讲师推荐出版。

在演解、修订、出版本套《习题解集》的过程中，得到我校校领导、教务科领导、师生员工和兄弟学校的领导、同行们的大力支持和鼓励。在此，向他们和为油印本付出过辛勤劳动的师生员工、为油印本的修订提供过宝贵意见的同行表示衷心的感谢。

株洲铁路电机学校数学教研组

一九八八年九月八日

目　录

习 题 21—1

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+n^2}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n)}$.

解 (1) $u_1=\frac{2}{1+1^2}=\frac{2}{2}=1$，

$$u_2=\frac{2}{2+2^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$u_3=\frac{2}{3+3^2}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},$$

$$u_4=\frac{2}{4+4^2}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10},$$

$$u_5=\frac{2}{5+5^2}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15};$$

(2) $u_1=\frac{1}{(2\times1-1)\cdot2^1}=\frac{1}{2}$,

$$u_2=\frac{1}{(2\times2-1)\cdot2^2}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{12},$$

$$u_3=\frac{1}{(2\times3-1)\cdot2^3}=\frac{1}{5\times8}=\frac{1}{40},$$

$$u_4=\frac{1}{(2\times4-1)\cdot2^4}=\frac{1}{7\times16}=\frac{1}{112};$$

$$u_5=\frac{1}{(2\times5-1)\cdot2^5}=\frac{1}{9\times32}=\frac{1}{288};$$

(3) $$u_1=\frac{1+(-1)^{1-1}}{1}=\frac{1+1}{1}=2;$$

$$u_2=\frac{2+(-1)^{2-1}}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$u_3=\frac{3+(-1)^{3-1}}{3}=\frac{3+1}{3}=\frac{4}{3},$$

$$u_4=\frac{4+(-1)^{4-1}}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$u_5=\frac{5+(-1)^{5-1}}{5}=\frac{5+1}{5}=\frac{6}{5};$$

(4) $$u_1=\frac{2\times1-1}{2\times1}=\frac{1}{2};$$

$$u_2=\frac{1\times(2\times2-1)}{2\times(2\times2)}=\frac{1\times3}{2\times4}=\frac{3}{8},$$

$$u_3=\frac{1\times3\times(2\times3-1)}{2\times4\times(2\times3)}=\frac{3\times5}{8\times6}=\frac{5}{16},$$

$$u_4=\frac{1\times3\times5\times(2\times4-1)}{2\times4\times6\times(2\times4)}=\frac{15\times7}{48\times8}$$

$$=\frac{35}{128},$$

$$u_5=\frac{1\times3\times5\times7\times(2\times5-1)}{2\times4\times6\times8\times(2\times5)}$$

$$=\frac{105\times9}{384\times10}=\frac{63}{256}.$$

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots$;

(3) $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$;

(4) $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+\cdots$;

(5) $\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{10}-\frac{a^5}{17}+\frac{a^6}{26}+\cdots$.

解 (1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$;

(2) $u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$;

(3) $u_n=\frac{n-2}{n+1}$;

(4) $u_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\cdots\cdot(3n-2)}$;

(5) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}a^{n+1}}{n^2+1}$或$u_n=\frac{(-a)^{n+1}}{n^2+1}$.

3. 根据级数收敛与发散的定义，判别下列级数的敛散性，如果收敛，则求其和：

(1) $1+2+3+\cdots+n+\cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(3) $\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 (1) $\because \quad S_n=1+2+3+\cdots+n$

$$=n\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{n^2}}=\infty,$$

($\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=0$,即$\frac{2}{n^2}$是$n\to\infty$时的无穷小,

$\therefore \frac{1}{\frac{2}{n^2}}$是$n\to\infty$时的无穷大)

即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,

$\therefore$ 级数$1+2+3+\cdots+n+\cdots$发散;

(2) $\because \quad S_n=\frac{1}{1\cdot6}+\frac{1}{6\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

$$=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{6})+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5n}{5n+1}$$

$$= \frac{n}{5n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1}{5+0} = \frac{1}{5},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在，

∴ 级数$\frac{1}{1\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$收敛，其和为$\frac{1}{5}$；

(3) ∵ $S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$

$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n)$

$= \ln(n+1)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$不存在；

∴ 级数$\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots$发散；

(4) ∵ $S_n = (\sqrt{1+2} - 2\sqrt{1+1} + \sqrt{1}) + (\sqrt{2+2} - 2\sqrt{2+1} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3+2} - 2\sqrt{3+1} +$

$$\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$= (1-\sqrt{2}) + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[(1-\sqrt{2}) + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{2}) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$= 1-\sqrt{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= 1-\sqrt{2} + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$= 1-\sqrt{2} + \frac{0}{2}$$

$$= 1-\sqrt{2},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$存在，

∴ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$收敛，其和为 $1-\sqrt{2}$.

4. 判别下列级数的敛散性：

(1) $e - e^2 + e^3 - e^4 + \cdots$;

(2) $1 + \ln 3 + \ln^2 3 + \ln^3 3 + \cdots$;

(3) $1 - \ln 2 + \ln^2 2 - \ln^3 2 + \cdots$;

(4) $1 + \ln 0.6 + \ln 0.6^2 + \ln 0.6^3 + \cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$;

(6) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$.

解 (1) $\because\quad u_n=(-1)^{n+1}e^n$,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}e^n=\infty,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0,$$

$\therefore$ 级数$e-e^2+e^3-e^4+\cdots$发散；

(2) $\because\quad u_n=\ln^{(n-1)}3$,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln^{(n-1)}3$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\ln 3)^{n-1}$$
$$=\infty,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0,$$

$\therefore$ 级数$1+\ln 3+\ln^2 3+\ln^3 3+\cdots$发散；

或

$\because$ 级数 $1+\ln 3+\ln^2 3+\ln^3 3+\cdots$是等比级数，其公比$q=\ln 3$，且$|q|=|\ln 3|>1$，

$\therefore$ 级数$1+\ln 3+\ln^2 3+\ln^3 3+\cdots$发散；

(3) $\because$ 级数$1-\ln 2+\ln^2 2-\ln^3 2+\cdots$是等比级数，其公比$q=-\ln 2$，且$|q|=|-\ln 2|<1$，

$\therefore$ 级数$1-\ln 2+\ln^2 2-\ln^3 2+\cdots$收敛，其和

$$S=\frac{1}{1-(-\ln 2)}=\frac{1}{1+\ln 2}=\frac{1}{\ln 2e};$$

(4) $\because\quad S_n=1+\ln 0.6+\ln 0.6^2+\ln 0.6^3+\cdots+$
$$+\ln(0.6)^{n-1}$$

$$=\ln(e\cdot 0.6\cdot 0.6^2\cdot 0.6^3\cdots\cdots 0.6^{n-1})$$

$$=\ln(e\cdot 0.6^{(2+3+4+\cdots+n)})$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(e\cdot 0.6^{(2+3+4+\cdots+n)})$$

$$=-\infty,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，

$\therefore$ 级数$1+\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots$发散；

或

$\because$ 级数 $\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots$是减去级数 1 $\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots$的第一项后得到的，根据一个级数增加或减少有限项，不改变级数敛散性的基本性质可知，级数 $1+\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots$ 的敛散性与级数$\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots$的敛散性相同，而级数

$$\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots$$

的通项$u_n=\ln0.6^n=n\ln0.6$.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}n\ln0.6=-\infty\neq 0,$$

$\therefore$ 级数 $\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots$ 发散，因此，级数

$$1+\ln0.6+\ln0.6^2+\ln0.6^3+\cdots\text{发散；}$$

(5) $\because$ $S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+$

$$+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$$

$$=1-0+\frac{1-0}{2}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

即　　$\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，

$\therefore$　级数$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+$
$+\cdots$收敛，其和为$\frac{3}{2}$；

(6). $\because$　　$u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{n}}}$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim 3^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{3^0} = 1 \neq 0,$$

$\therefore$ 级数$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$发散。

习 题 21—2

1. 用比较审敛法判别下列级数的敛散性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(3) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$.

解 (1) $\because$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+$ $+\cdots$的各项不超过级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

的相应项的值，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$是由调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的各项同乘以$\frac{1}{2}$后得到的，由于调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，将它的各