平面
解析几何入门

陈希英 编

黑龙江教育出版社

平面解析几何入门

陈希英　编

黑龙江教育出版社

1988年·哈尔滨

平面解析几何入门

陈希荬　编
责任编辑：白景凯
封面设计：张淑兰　陈东妮

黑龙江教育出版社出版（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华附属印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张 4.5 ·字数 85 千
1988 年 10 月第 1 版· 1988 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—1,162

ISBN 7-5316-0426-4/o·3　　定价：1.30元

前　言

十七世纪上半期，由于生产力的迅猛提高，在各门自然科学和生产技术的推动下，特别是在天文学和力学的推动下，便产生了最初的解析几何。

人类在征服自然的过程中，对炮弹在重力作用下的运行轨道，对天体中的行星运行轨道，对机械工业中凸轮的轮廓线、齿轮的齿廓线等，逐渐地有了新的认识。知道了炮弹在重力作用下的运行轨道是抛物线，太阳系中绝大多数天体的运行轨道是椭圆（有的慧星的运行轨道是抛物线或双曲线，人造地球卫星的运行轨道从地球上看也是椭圆），机械上的凸轮轮廓线多是等进螺线（也有直线段或其它曲线）等，这样解析几何便有了新的发展。所以，解析几何的平面部分所要研究的对象，主要是从上述具体问题抽出来的几何图形——直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线及其摆线、阿基米德螺线等，但主要的研究对象是二次曲线（即圆锥曲线）。而解析几何的空间部分研究的主要对象是平面、空间直线、空间曲线和常见的二次曲面等。

解析几何的研究方法，是用代数的方法（或称坐标法）来研究几何图形的性质。就是说解析几何是在建立坐标系的条件下，揭示几何学（以空间形式为主要研究对象）和代数学（以数量关系为主要研究对象）之间的关系，以使数和形统一起来，把几何问题转化为代数问题的研究上来。具体地

说，就是借助于坐标系，把点与数组，曲线（或曲面）与方程建立起对应关系，再用代数方程来研究几何上的点的轨迹——曲线和曲面的性质等。

对于坐标的方法，曲线与方程对应统一的观点，初学时学生不容易掌握，而中学课本对这一部分写得又很简略，因此编写了这本书，目的是为了帮助学生深入理解和全面掌握中学课本上的知识。全书共分三章，第一章坐标法，是介绍直线上的坐标系，特别是平面上的直角坐标系及其三个简单公式；第二章曲线和方程，主要是介绍解析几何的两个基本问题，即已知曲线求出它的方程和已知方程绘出它所确定的曲线；第三章直线和圆，主要是介绍直线的方程、直线与直线、点与直线的位置关系和圆的有关问题等。

为了便于学生自学，在每一章的开始时都首先介绍了本章的主要内容，学习重点，学习要求和注意事项等。并且在每一章末尾配备有类型齐全、数量充足的复习思考题和练习题，练习题并附有答案，可供学生作题检查时参考。

本书在编写过程中，哈尔滨工业大学数学力学系王泽汉教授阅读了本书的初稿，并提出了宝贵意见。在此表示谢意。

由于水平和时间所限，书中不当之处，在所难免，欢迎读者批评指正。

目　　录

第一章　坐标法…………………………………（1）

§1.1　有向线段…………………………………（2）
§1.2　直线上点的坐标……………………………（5）
§1.3　平面上点的直角坐标…………………………（9）
§1.4　几个简单公式………………………………（15）

第二章　曲线与方程……………………………（30）

§2.1　曲线与方程的对应…………………………（30）
§2.2　从曲线求它的方程…………………………（33）
§2.3　由方程绘出它的曲线………………………（43）
§2.4　两条曲线的交点……………………………（51）

第三章　直线和圆………………………………（53）

§3.1　直线的方程…………………………………（54）
§3.2　两条直线的相互位置………………………（68）
§3.3　直线的法线式方程，点到直线的
　　　距离　…………………………………………（76）
§3.4　直线系的方程………………………………（88）
§3.5　圆　……………………………………………（95）

复习思考题……………………………………(113)
基本检查题……………………………………(115)
综合检查题……………………………………(117)
练习题提示及答案……………………………(119)

第一章　坐标法

解析几何是用代数的方法（即坐标法）来研究几何图形性质的一门数学分科。我们知道：作为代数学的基本对象"数"和几何学的基本元素"点"之间存在某种联系，这种联系正是通过坐标法的建立而得到的。有了坐标法这个工具，几何图形就可用代数方程来表示，通过对方程的研究，就可以掌握几何图形的性质，这就是解析几何的主要方法。

本章的主要内容

首先通过有向线段与实数的一一对应为工具，来建立直线上点与实数的一一对应关系，这样就很容易的得到了直线上的坐标系。

其次是建立平面上的直角坐标系，使得平面上的点与实数对 (x, y) 建立起一一对应关系，实现数、形统一。进而得到三个简单的计算公式——两点间的距离、线段的定比分点和三角形面积的公式等。

应注意的是：在建立了直线上的坐标系和平面上的直角坐标系之后，就应该有点与一个实数 (x) 和点与数对 (x, y) 的对应统一的思想。因为这是在直角坐标系下，把研究曲线的几何性质归结为研究代数方程的基础。

§1.1 有向线段

在初等几何中，已经建立了线段与正实数的对应关系，在这里我们来研究有向线段与实数的对应关系，以便为建立在直线上的点与实数的对应关系做准备。

线段是直线上两点间的部分。在平面几何中，是不考虑线段的方向的，但在日常生活和生产实践中，有时是需要考虑直线和线段的方向的。如我们沿一条笔直的路向东或向西走2公里，方向不同，目的地也不同。这样看来，有时需要给直线和线段规定一个方向，而一条直线和线段是有两个相反方向的。有向直线就是规定了正方向的直线。现有一线段，如果以 A 为起点，B 为终点，此时线段的方向是从 A 到 B 的方向。反过来，如果以 B 为起点，A 为终点，此时线段的方向是从 B 到 A 的方向。因此，具有一定长度和方向的线段，称为有向线段（简称为线段）．规定了起点和终点的线段，即规定了方向的线段称为**有向线段**。有向线段的表示法为，从 A 到 B 的有向线段，记为 $\overline{AB}$（注意，应将起点字母写在前面）．

图 1.1

有向线段与实数的对应，就是要规定出在什么条件下，有向线段对应正数、负数和零。设 A，B 是 x 轴（数轴）上的二点，如果线段 $\overline{AB}$ 与 x 轴（有向直线）的方向相同时，规定线段 $\overline{AB}$ 的代数值为正值。反之，如果线段 $\overline{AB}$ 与 x 轴的方向相反时，规定线段 $\overline{AB}$ 的代数值为负值。特殊情况，如果

线段$\overline{AB}$的起点和终点重合时，此时线段$\overline{AB}$称为零线段，其值为零。以后我们把线段$\overline{AB}$的数值（即代数值）记为 AB，它的长度记为$|AB|$。

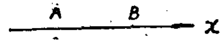

图 1.2

从以上规定可以看出，在 x 轴上的线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$，它们的长相等，而方向相反。因此，得 $|AB|=|BA|$

因 $AB=-BA$ 即 $AB+BA=0$

关于有向线段的加法，有下面的法则，

沙尔定理：在数轴上任取三个不同点A、B、C，不论其位置如何，都有 $AB+BC=AC$

(1)

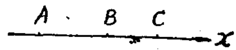

图 1.3

证：三个不同的点在数轴上的排列共有 $3!=6$ 种。这里只证明其中的两种，其余各种情况，可用类似方法证明。

(1) 当点 B 在线段$\overline{AC}$的内部时

如图 1.3，得

$|AC|=|AB|+|BC|$

而 $|AC|=AC$，$|AB|=AB$ $|BC|=BC$，

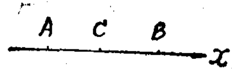

图 1.4

所以 $AC=AB+BC$

(2) 当点 B 在线段$\overline{AC}$的外部时

如图 1.4 得

$|AC|=|AB|-|BC|$

而 $|AC|=AC$，$|AB|=AB$，$|BC|=-BC$，

所以 $AC=AB+BC$

同理可证图 1.5 的情况。

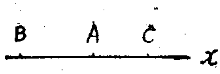

图 1.5

读者可自行推导图 1.6 的三种情况。

最后须指出的特殊情况是，当三点 A,B,C 重合或其中的任何二点重合时，本定理可仍成立。

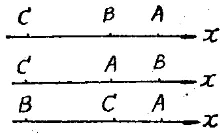

图 1.6

推论：在数轴上任取 n（$n\geqslant 3$）个点 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$，不论其位置如何，恒有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n, \tag{2}$$

证　从略（读者可应用数学归纳法证明之）。

练习题　1.1

1．线段与有向线段有何区分？怎样表示有向线段？

2．在数轴上的有向线段的数值，什么时候为正数？什么时候为负数？什么时候为零？

3．$\overline{AB}$，AB，$|AB|$ 三者的几何意义是什么？有何不同。

4．在数轴上，设有 $n(n\geqslant 3)$ 个点为 $A_1,A_2\cdots\cdots,A_n$，求证不论其位置如何，都有

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n.$$

§1.2 直线上点的坐标

本节的基本问题，是在有向线段与实数对应的基础上，来建立在直线上点与实数的对应关系。

在初中代数中我们已经知道，一条有向直线，选取了某一定点为原点，并规定长度单位的叫数轴。这样在数轴上的每一点都可用一个实数来表示。反之，任意一个实数都能在数轴上找到唯一的一个点相对应。因此在数轴上的点与全体实数间便建立了一一对应关系。由数轴上点 M 所确定的实数 x 称为点 M 的坐标，记做 $M(x)$。即点 M 的坐标是 x，则以原点为起点，以 M 点为终点的有向线段的数值也是 x。

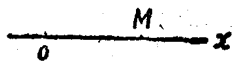

图 1.7

所以有向直线，原点和长度单位三者便构成了直线上的一个坐标系数轴。以有向线段与实数一一对应为基础，便建立了在数轴上任一点与一个实数的一一对应关系。这样便建立了直线上的坐标系。

1. 设 $M_1(x_1)$ 和 $M_2(x_2)$ 是数轴上的已知二点，如图 1.8，求(1)线段 $\overline{M_1M_2}$ 的值；(2)点 M_1 和 M_2 间的距离。

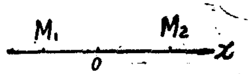

图 1.8

解：(1) 应用线段的加法定理有

$$M_1M_2 = M_1O + OM_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1 \tag{1}$$

即在数轴上，线段的数值等于终点的坐标减去起点的坐标。

(2) 点 M_1 和 M_2 间的距离为

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1| \tag{2}$$

例1 已知二点 $M_1(4)$和 $M_2(2)$，求线段$\overline{M_1M_2}$ 的值和 M_1 和 M_2 间的距离。

解：应用公式（1），$M_1M_2=x_2-x_1$ 得

$$M_1M_2=2-4=-2$$

再应用公式（2），$|M_1M_2|=|x_2-x_1|$得

$$|M_1M_2|=|-2|=2$$

例 2 设一直线上任意三不同点 A，B，C，不论它们的相互位置关系怎样，都有 $AB+BC+CA=0$

证明：设三点 A,B,C 在数轴上的坐标分别为 x_1、x_2、x_3，则 $AB=x_2-x_1$，$BC=x_3-x_2$，$CA=x_1-x_3$，所以 $AB+BC+CA=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_1-x_3)=0$

2. 线段上定比分点的公式：设点 P 是线段 AB 上的一个定点。如图 1.9，点 P 把线段

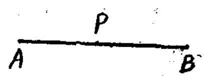

图 1.9

AB 分成二段，使它们的比为定数λ即$\frac{AP}{PB}=\lambda\neq(-1)$ 当 $\lambda>0$ 时，为内分，P 为内分点。当 $\lambda<0$ 时，为外分，分点 P 在线段 AB 两端的延长线上，P 为外分点。

设 已知 A 点的坐标是 x_1，

B 点的坐标是 x_2，

求分点 P 的坐标。

解：设分点 P 的坐标为 x

已知 $AP=x-x_1$

$$PB = x_2 - x$$

因为 $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda(\neq -1)$

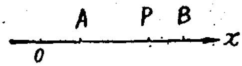

图 1.10

则 $x - x_1 = \lambda\ (x_2 - x)$

$(1+\lambda)x = x_1 + \lambda x_2$

所以 $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\ \ (\lambda \neq -1)$ (3)

这就是线段上分点 P 的公式。

当 $\lambda = 1$ 时，此时 P 为线段 $\overline{AB}$ 的中点，它的坐标是

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

例 3 已知二点 $A(2)$，$B(5)$，分点 P 使 $\dfrac{AP}{PB} = -2$ 求分点 P 的坐标

解：根据线段的定比分点公式（3）有

$\therefore\ \ x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\quad x = \dfrac{2+(-2)\cdot 5}{1+(-2)} = 8$

例 4 设一直线上任意四个不同点 A, B, C, D，不论它们的相互位置关系如何，都有 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

证明：设四点 A, B, C, D，在数轴上的坐标分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，据公式 $AB = x_2 - x_1$ 得

左端 $= AB \cdot CD + BC \cdot AD = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3)$

$+ (x_3 - x_2)(x_4 - x_1)$

$= -x_2x_3 - x_1x_4 + x_3x_4 + x_1x_2$

$= x_3(x_4 - x_2) - x_1(x_4 - x_2)$

$$= (x_3 - x_1)(x_4 - x_2)$$

右端 $= AC \cdot BD = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2)$

所以 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

练习题 1.2

1．直线与有向直线，直线与数轴有何区分？

2．数轴是怎样建立的，数轴上的点与实数有何关系？

3．在数轴上，任一有向线段的数值怎样表示？任二点间的距离公式如何？

4．已知数轴上三点 $A(2)$，$B(4)$，$C(6)$，求

(1) AB，BC，CA。

(2) $|AB|$，$|BC|$，$|CA|$。

(3) $AB + BC + CA = ?$

(4) 证明：$AB + BC = AC$。

5．已知 A，B，C，D是同一条直线上的四个不同点，证明：

(1) $AB + BC + CD = AD$

(2) $BD \cdot CD \cdot BC + CD \cdot AD \cdot CA + AD \cdot BD \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0$

6．已知二点 $A(2)$，$B(4)$，当分点 P 把线段$\overline{AB}$分成下列定比 λ 时，求此分点 P 的坐标：

(1) $\lambda = 1$；(2) $\lambda = -2$；(3) $\lambda = 0$；(4) $\lambda = \frac{1}{4}$。

§1.3 平面上点的直角坐标

在上一节中，我们已经学过了用一实数来确定直线上点的位置。现在把这一方法加以推广，便得到了用一对实数来确定平面上点的位置的方法。这样用数对确定平面上点的位置的方法有多种，在这一节里所要研究的是直角坐标法。

为了确定平面上点的位置，在平面上取两条互相垂直的直线，它们的交点 o 称为坐标原点，ox 轴称为横轴或 x 轴，它的正方向习惯上规定为由左至右。另一条与它垂直的 oy 轴称为纵轴或 y 轴，它的正方向是从下到上。x 轴和 y 轴总称为坐标轴。再选一个公共的单位长度 E，这样便建立了平面上的直角坐标系，或称为笛卡儿(Descartes，1596－1650，法国人)直角坐标系。记为 xoy 或 $o-xy$。如图 1.11。

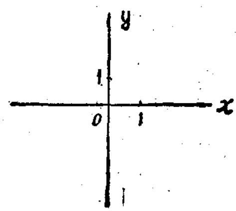

图 1.11

设 P 是平面上任意一点，过 P 点作 x 轴和 y 轴的垂线，垂足分别是点 M 和点 N，即 $x=OM$，$y=ON$。容易看出 $|x|$ 给出了 P 点到 y 轴的距离，数值 x 的符号说明了它在 y 轴的哪一侧。$|y|$ 给出了 P 点到 x 轴的距离，数值 y 的符号说明了它在 x 轴的哪一侧。就是说平面上任意一点 P，对应着唯

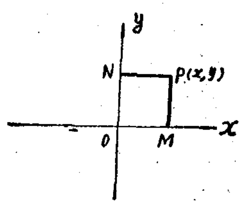

图 1.12

一的一对有顺序的实数 x 和 y，即 P 点的位置可以用数对 (x, y) 来表示。

反之，任意给定一对有顺序的实数 x 和 y，则在 x 轴和 y 轴上分别确定二点 M 和 N，过点 M 引直线平行于 y 轴，过点 N 引直线平行于 x 轴，此二直线交于唯一的一点 P。即一对有顺序的实数 x 和 y，确定了平面上唯一的一点 P。

综合上述，在平面上取定直角坐标系后，我们便建立了平面上的点与全体有顺序的实数对之间的一一对应关系，也就是说，在给定的直角坐标系下，平面上任意一点唯一地决定一对有顺序的实数。反之，任给一对有顺序的实数，它也唯一地决定平面上一个点。确定点 P 的实数对 x 和 y，称为点 P 的坐标，记为 $P(x, y)$。括号内第一个数 x 称为点 P 的第一坐标或横坐标，第二个数 y 称为点 P 的第二坐标或纵坐标。在解析几何中，已知点就是已知点的坐标，求某点就是求某点的坐标。

因此我们得到结论是，由于建立了直角坐标系，我们便把平面内的点和一对有序实数有机地统一起来了。这样对于平面内关于点的几何问题，就转化为关于这些点的坐标的数的问题上来了。解析几何正是从这一基本观点出发，用代数的方法（即坐标的方法）来研究几何图形性质的。

平面上的直角坐标系，按 x 轴和 y 轴选取的方向可以分为右手系和左手系两大类：把 x 轴按逆时针方向绕原点 O 旋转 90° 而与 y 轴重合时，如果它们的方向一致，这样的坐标系称为右手系，如图 1.13。否则就称为左手系。如图 1.14 所示。本书都是采用右手系，以后就不另加说明了。