

A realistic illustration of a human hand, with the index finger pointing towards the title. The hand is positioned in the upper left quadrant of the cover. The background is a textured, yellowish-gold surface.

解題

錯 中學數學  
誤分析

楊森茂  
陳聖德合編  
商務印書館

楊森茂 陳聖德合編 • 商務印書館

# 中學數學 解題錯誤分析

## 中學數學解題錯誤分析

編者——楊森茂 陳聖德

出版者——商務印書館香港分館

香港皇后大道中35號

印刷者——中華商務聯合印刷（香港）有限公司

香港九龍炮仗街75號

版次——1980年4月初版

© 1980 商務印書館香港分館

# 緒 言

舉凡事理，皆有正反兩面，如僅知正面之是，而不察反面之非，則所見必偏而不全，希臘大哲人蘇格拉底的講學方法首重使人自覺所見之非，如此始能虛心受教而導於正覺。

我們研習數學，正面而言，自應徹底明瞭所有定義、公理、基本定理及運算法則，而對於反面各類型的錯誤，也要加以注意。蓋數學本貴推理嚴謹，立論正確，不容有毫厘之差。若對於錯誤的根源，毫無認識，則在解題或論證時就會不期然而違反了嚴謹性及正確性的要求，不可不慎。

一般數學課本，限於篇幅，只有正面的敘述，而乏反面的探討，一方面教師在授課時，亦少提出學生常犯的錯誤，詳加分析，以致學生對於一些不是淺而易見的錯誤，每一犯再犯而不自覺察。此外尚有若干似是實非的謬論詭證，更使學生困惑不解。本書就是爲着彌補中學數學教學中這一種缺陷而作，望能收到預期的效果。

本書所搜集及撰寫的資料，限於算術、代數、平面幾何、三角、解析幾何及微積分初步，適合中學教師及學生參考之用，並可作爲數學課本的補充教材。所舉各例，包括許多趣題，頗足動人好奇心，使其樂於求解。且通過分析錯誤的根源，不但可以啓發思路、鍛煉智力，提高學習的興趣，而對於所牽涉的理論及方

法，亦可得到更深刻的認識。

本書每章分爲兩部分：第一部分爲“誤解及誤證舉例”，第二部分爲“錯誤指正和分析”。讀者應先試圖自己找出第一部分中各題解法或證法的錯誤所在，然後翻閱第二部分的指正和分析，以作比較。這樣才可以加深對各題的了解，從而可以避免重犯類似的錯誤。

本書文字力求淺顯易讀。論點如有不够明晰或錯漏之處，希讀者批評指正。

編者

一九七九年九月一日

# 目 錄

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 緒 言                                    | 1   |
| 第一章 算 術                                | 1   |
| (I)誤解及誤證舉例                             | 1   |
| 1. 整數    2. 分數和小數    3. 比和比例    4. 近似值 |     |
| (II)錯誤指正和分析                            | 9   |
| 第二章 代 數                                | 18  |
| (I)誤解及誤證舉例                             | 18  |
| 1. 代數方程    2. 不等式    3. 方根和根式          |     |
| 4. 指數和對數    5. 複數    6. 數學歸納法          |     |
| (II)錯誤指正和分析                            | 37  |
| 第三章 幾 何                                | 59  |
| (I)誤解及誤證舉例                             | 59  |
| 1. 角和綫    2. 三角形和四邊形    3. 圓           |     |
| 4. 圖形的分割和拼合                            |     |
| (II)錯誤指正和分析                            | 80  |
| 第四章 三 角                                | 94  |
| (I)誤解及誤證舉例                             | 94  |
| 1. 三角函數值    2. 三角恒等式和不等式    3. 三角方程    |     |
| 4. 反三角函數    5. 三角形的性質                  |     |
| (II)錯誤指正和分析                            | 107 |

|                                             |     |
|---------------------------------------------|-----|
| 第五章 解析幾何和微積分.....                           | 117 |
| (I)誤解及誤證舉例.....                             | 117 |
| 1. 參數方程      2. 極坐標      3. 極限      4. 不定積分 |     |
| 5. 定積分      6. 無窮級數                         |     |
| (II)錯誤指正和分析.....                            | 132 |

# 第一章 算 術

## (1) 誤解及誤證舉例

### 1. 整 數

- 1.1 燈柱數目：**某街道長 24 公尺，兩旁分別樹立電燈柱和煤氣燈柱。已知電燈柱兩兩相隔 4 公尺，煤氣燈柱兩兩相隔 6 公尺，問此街道上共有燈柱幾多？

[解]電燈柱的數目  $= 24 \div 4 = 6$

煤氣燈柱的數目  $= 24 \div 6 = 4$

$\therefore$  此街道上燈柱的數目  $= 6 + 4 = 10$

- 1.2 選擇職位：**甲乙兩公司各徵聘會計一人，年薪同是 10,000 元，每半年發薪一次。甲公司規定每半年加薪 500 元，乙公司則規定每年加薪 2,000 元。現若此兩職任由某君選擇，問某君應選何職才可獲得較多的收入？

[解]若某君選擇甲公司的職位，則每年所獲加薪為

$$2 \times 500 \text{ 元} = 1,000 \text{ 元}$$

現乙公司規定每年加薪 2,000 元，故某君應選乙公司的職位方可獲得較多的收入。

**1.3 方桌切角：**方桌一張共有四角，現切去一角，問尚有幾角？

[答]四個角減去一個角等於三個角。

∴方桌切去一角後尚有三角。

**1.4 酒水混和：**杯子兩隻，甲杯盛清水半杯，乙杯盛純酒精半杯。

現自乙杯取酒精一湯匙倒入甲杯，混和後自甲杯再取一湯匙倒回乙杯，問乙杯所含的水量(指容積而言)是否多於甲杯所含的酒精量？

[答]倒入甲杯的是一湯匙純酒精，倒回乙杯的是一湯匙酒水混合液，故乙杯所含的水量，少於甲杯所含的酒精量。

**1.5 偽鈔找贖：**一陌生人到一鐘錶店購買一價值 120 元的手錶，並付一張面額 500 元的紙幣要求找贖。該店轉向一間鄰近的藥房找換，並將手錶及找款 380 元交該陌生人取去。後來藥房發覺該 500 元紙幣乃是偽鈔，趕來交涉，結果鐘錶店只好給還 500 元。問該鐘錶店總共損失若干？

[解]手錶價值 120 元，找給陌生人 380 元，還給藥房 500 元，故該鐘錶店總共損失

$$120 \text{ 元} + 380 \text{ 元} + 500 \text{ 元} = 1,000 \text{ 元}$$

**1.6 除法運算：**(a)  $392 \div 14 = ?$  (b)  $4,669 \div 23 = ?$

[解] (a)

$$\begin{array}{r} 271 \\ 14 \overline{) 392} \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 112 \phantom{00} \\ \underline{98} \phantom{00} \\ 14 \phantom{00} \\ \underline{14} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \overline{) 4,669} \\ \underline{46} \phantom{00} \\ 69 \phantom{00} \\ \underline{69} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore 392 \div 14 = 271$$

$$\therefore 4,669 \div 23 = 203$$

**1.7 奇數大於偶數：**下面的證法，錯誤在哪裏呢？

[證]設  $n$  是整數，則  $2n+1$  及  $2n$  分別表示奇數及偶數。對於任意給定的  $n$ ， $2n+1 > 2n$ 。 $\therefore$  奇數大於偶數。

**1.8 數字和相等的三位數必相等：**下面的證法，有沒有錯誤呢？

[證]設  $N_1, N_2$  各為三位數：

$$N_1 = 100a_1 + 10b_1 + c_1$$

$$N_2 = 100a_2 + 10b_2 + c_2$$

式中  $a_1, b_1, c_1$  及  $a_2, b_2, c_2$  分別表示  $N_1, N_2$  各位的數字。

以  $S_1, S_2$  表示  $N_1, N_2$  的數字和，即

$$S_1 = a_1 + b_1 + c_1, \quad S_2 = a_2 + b_2 + c_2$$

設  $N = N_1 - N_2$ ，則

$$N = 100(a_1 - a_2) + 10(b_1 - b_2) + (c_1 - c_2)$$

$N$  的數字和  $= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (c_1 - c_2)$

$$= (a_1 + b_1 + c_1) - (a_2 + b_2 + c_2) = S_1 - S_2$$

如果  $N_1, N_2$  有相同的數字和，即  $S_1 = S_2$ ，則  $N$  的數字和為 0 因而  $N = 0$

$$\therefore N_1 - N_2 = 0, \text{ 即 } N_1 = N_2$$

**1.9 最小公倍數：**求 28, 42, 108 的  $L.C.M.$  下面的算法，有沒有錯誤呢？

[解]用連除法求所給三數的  $L.C.M.$  如下：

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 28 & 42 & 108 & \\ \hline 3 & 7 & 42 & 27 & \\ \hline 7 & 7 & 14 & 9 & \\ \hline & 1 & 2 & 9 & \end{array}$$

$\therefore$  所求的  $L.C.M.$

$$= 4 \times 3 \times 7 \times 2 \times 9 = 1512$$

## 2. 分數和小數

- 2.1 巧分十七頭牛：**某農夫死後只留下十七頭牛分給他的三個兒子，按其遺囑，長子應得二分之一，次子應得三分之一，幼子應得九分之一，但不准把牛宰割分配。三個兒子不知怎樣分法，後來同鄉的一個老前輩帶來一頭牛借給他們。於是就有了十八頭牛。長子、次子及幼子分別分得九頭牛、六頭牛及二頭牛。剩下的一頭牛，還給老前輩牽回去。這樣的分法是不是正確呢？

[答]借來一頭牛共 18 頭牛，18 的  $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$  及  $\frac{1}{9}$  皆是整數，所

以可以按照遺囑的規定分配給三個兒子，剩下的一頭牛原是借來的，自應還給老前輩。這樣的分法是正確的。

- 2.2 分式運算：** $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{26}{75} + \frac{13}{25} = ?$

[解] 原式  $= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

- 2.3 循環小數的和：** $0.\dot{2}\dot{6} + 0.\dot{4}\dot{3}\dot{2} + 2.\dot{3}\dot{4}\dot{5} = ?$

[解]按循環小數加減法，先要把循環節化為一樣，即實行“通位”。今已知三數的循環位數是一、三、二，其最小公倍數是六，故先把各數的循環位數都化為六，然後照通常小數點對齊並列而相加，如下所示：

$$\begin{array}{r}
 0.\dot{2}\dot{6}\dot{6}\dot{6}\dot{6}\dot{6} \\
 0.\dot{4}\dot{3}\dot{2}\dot{4}\dot{3}\dot{2}\dot{4} \\
 +) 2.\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{4}\dot{5}\dot{4}\dot{5} \\
 \hline
 3.\dot{0}\dot{4}\dot{4}\dot{5}\dot{5}\dot{3}\dot{5}
 \end{array}$$

2.4 循環小數的差： $7.\dot{4}\dot{2} - 2.785\dot{2} = ?$

[解] 先把循環節的位數化為一樣，即實行“通位”。今已知二數的循環位為二、三，故先把二數的循環位數都化為六，然後照通常小數點對齊並列而相減，如下所示：

$$\begin{array}{r} 7.\dot{4}\dot{2}\dot{4}\dot{2}\dot{4}\dot{2} \\ - ) \quad 2.785285\dot{2} \\ \hline 4.638957\dot{2} \end{array}$$

2.5 賣蛋問題：某農婦有雞蛋 60 隻，賣價每元三隻。鄰人有鴨蛋 60 隻托其代賣，賣價每元二隻。為着方便起見，該農婦可否按每二元五隻之價放售？

[解] 雞蛋鴨蛋同是 60 隻，而每元三隻和每元兩隻的平均數是每二元五隻，所以該農婦可以按每二元五隻之價放售。

2.6 平均速度：某甲乘車自山下上山頂，上山時車行每小時 20 公里，下山時車行每小時 40 公里。求車行的平均速度。

[解] 20 公里和 40 公里的平均數  $= \frac{1}{2}(20 + 40)$  公里 = 30 公里。故車行的平均速度為每小時 30 公里。

2.7 分攤車資：A、B 兩地相距 30 公里。某甲自僱一車，要從 A 地駛往 B 地，來回一次。當途經 C 地時，遇到友人某乙，也要往 B 地，就順便載他同去。回程時又載某乙返到 C 地然後自己駛回 A 地。已知 C 地和 A、B 兩地的距離相等，車資總共 60 元，問某乙應負擔若干？

[解] 某甲來回共坐了 60 公里而某乙只坐了 30 公里，故某乙

所負擔的車資應等於某甲所負擔的一半，亦即全部車資的三分之一。

$$\therefore \text{某乙應負擔 } \frac{1}{3} \times 60 \text{ 元} = 20 \text{ 元}$$

### 3. 比和比例

**3.1 氣球上昇：**氫氣球每十五分上昇 120 公尺。問十小時共上昇幾公尺？

[解]十小時等於六百分，設在此時間內上昇  $x$  公尺，則

$$15 : 600 = 120 : x$$

$$\therefore x = 4,800$$

即氫氣球共上昇 4,800 公尺。

**3.2 馬匹競賽：**甲乙兩駒競賽 1600 公尺路程。已知甲駒 1000 公尺路程最佳賽績爲 1 分 2 秒，乙駒 2000 公尺路程最佳賽績爲 2 分 5 秒，問此次競賽，哪一駒可以獲勝？

[解]設甲乙兩駒分別可在  $x$  秒和  $y$  秒跑畢 1600 公尺全程。

因 1 分 2 秒 = 62 秒

$$\therefore 1000 : 1600 = 62 : x$$

$$\therefore x = 99.2$$

因 2 分 5 秒 = 125 秒

$$\therefore 2000 : 1600 = 125 : y$$

$$\therefore y = 100$$

即甲乙兩駒分別可在 99.2 秒（或 1 分 39.2 秒）和 100 秒（或 1 分 40 秒）跑畢 1600 公尺全程，故甲駒可以獲勝。

3.3  $4=7$ ；下面的證法，錯誤在哪裏呢？

[解]按比例  $4:4=7:7$

應用分配律得

$$4(1:1)=7(1:1)$$

但  $1:1=1$ ，故得  $4=7$

3.4 打鐘時間：鐘打 6 下需時 5 秒。問鐘打 18 下需時幾秒？

[解]設鐘打 18 下需時  $x$  秒，則

$$6:18=5:x$$

$$\therefore x=15$$

故本題的答案為 15 秒。

3.5 女工人數：女工六人可在六天內製成某種工藝品六件。今若要在三十天內製成此種工藝品三十件，問要用女工幾人？

[答] 30 是 6 的 5 倍。按比例，若要在三十天內製成此種工藝品三十件，要用女工三十人。

3.6 煮蛋時間：雞蛋 3 隻可在 5 分鐘煮熟，問雞蛋 18 隻可在幾分鐘內煮熟？

[答] 18 是 3 的 6 倍。按比例，18 隻蛋可在半小時煮熟。

3.7  $\frac{1}{2} = -1$ ；下面的證法，錯誤在哪裏呢？

[解]按加比定理，若

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k, \text{ 則}$$

$$\frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3} = k \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{今設 } \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} \text{ 則}$$

$$k = \frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}$$

$$= \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots(2)$$

又於(1)中取  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  得

$$k = \frac{a-b}{(b+c)-(c-a)} = \frac{a-b}{b-a} = -1 \dots\dots\dots(3)$$

自(2)、(3)得

$$\frac{1}{2} = -1$$

#### 4. 近似值

4.1  $1 \doteq 0.\dot{9}$ ; 問 1 是不是  $0.\dot{9}$  的近似值?

[答]因  $0.\dot{9} = 0.999\dots$  和 1 的值相差極微, 故 1 是這個循環小數的近似值。

4.2 近似積: 化  $26\frac{1}{7}$  及  $3\frac{3}{13}$  為小數, 並求其近似積, 但其整數部分要準確。

[解]化  $26\frac{1}{7}$  及  $3\frac{3}{13}$  為小數並取其近似值:

$$26\frac{1}{7} \doteq 26.1, \quad 3\frac{3}{13} \doteq 3.2$$

故所求的近似積為  $26.1 \times 3.2 \doteq 83.5$

4.3  $100,000 \doteq 200,000$ ; 問 200,000 有可能說是 100,000 的近似值嗎?

[解]兩個 100,000 以上的數, 若相差為 1, 則這兩數的值顯然近似。故

$$100,000 \div 100,001$$

$$100,001 \div 100,002$$

$$100,002 \div 100,003$$

.....

.....

$$199,998 \div 199,999$$

$$199,999 \div 200,000$$

以上左右兩邊各數相加得

$$100,000 + 100,001 + 100,002 + \cdots + 199,998 + 199,999$$

$$\div 100,001 + 100,002 + 100,003 + \cdots$$

$$+ 199,999 + 200,000$$

自上式兩邊消去 100,001, 100,002, ..., 199,999 各數得

$$100,000 \div 200,000$$

**4.4 精密度和準確度：**下列三個測定值，哪一個較為精密？哪一個較為準確？25 公里，25 公尺，25 公分。

[答]在 1 公里，1 公尺和 1 公分這三個單位度量中，1 公分最小。一般而言，一個測定值的最大可能絕對誤差，不會超過所定單位度量的一半，故本題三個測定值中，25 公分最為精密而且最為準確。

## (II) 錯誤指正和分析

### 1. 整數

**1.1 燈柱數目：**把一線段分為  $n$  個間隔，分點加兩端點共有  $n+1$

點。據此可知

$$\text{電燈柱的數目} = 24 + 4 + 1 = 7$$

$$\text{煤氣燈柱的數目} = 24 + 6 + 1 = 5$$

$$\therefore \text{所求的燈柱數目} = 7 + 5 = 12$$

**1.2 選擇職位：**某君應選甲公司的職位才可獲得較多的收入。茲比較兩公司首二年會計的薪金如下：

|          | 甲公司      | 乙公司      |
|----------|----------|----------|
| 第一年上半月薪金 | 5,000 元  | 5,000 元  |
| 下半年薪金    | 5,500 元  | 5,000 元  |
| 第一年薪金總額  | 10,500 元 | 10,000 元 |
| 第二年上半月薪金 | 6,000 元  | 6,000 元  |
| 下半年薪金    | 6,500 元  | 6,000 元  |
|          | 12,500 元 | 12,000 元 |

依此推算，可知甲公司會計的薪金，每年皆比乙公司會計的薪金多 500 元。若某君就職乙公司則是錯誤的選擇。

**1.3 方桌切角：**切角問題不能用減法。方桌切去一角反而加多了一角，共有五角。

**1.4 酒水混和：**乙杯所含的水量應等於甲杯所含的酒精量才對。實際上兩杯按題意混和後，原來的總容量不變，假如混和後乙杯所失去的酒精量是 *Acc.* 這 *Acc.* 酒精必是到了甲杯裏而替換了甲杯裏 *Acc.* 清水，這 *Acc.* 清水也就是乙杯所含的水量。

**1.5 偽鈔找贖：**該鐘錶店的損失是手錶的成本（當然少於 120 元，除非割價廉售）及找給陌生人的 380 元。藥房曾給鐘錶店