HÉNG DĚNG SHI

恒等式

孙 涤 寰 著

人民教育出版社

恒 等 式

孙 泽 瀛 著

人 民 教 育 出 版 社

内容提要

本书由代数式的基本概念讲起，进而讲余式定理和因式定理，以及恒等式的性质．在这个基础上，讲了因式、倍式和置换、对称式、交代式等概念，同时举例讲解代数式的运算和代数式的恒等变形．最后讲等式的证明和求值．本书举例浅显易懂，并配置一定数量的习题，习题附答案或详解．本书可供初、高中学生课外阅读，也可供中学教师和师范院校学生参考．

恒 等 式

孙 涤 寰 著

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 5 字数 104,000

1986年9月第1版 1987年6月第1次印刷

印数 1—9,000

书号 7012·01133 定价0.66元

目　录

第一章　式的计算和恒等式

第二章　等式的证明和式的值

第一章　式的计算和恒等式

1.1　式的计算的基础知识

1. 单项式

由数与字母仅用乘法运算而成的式子叫做**单项式**. 例如,$3x^2$、$-5x^3y$、$6xy^3z^2$ 等都是单项式.

单项式中的数字因数叫做单项式(或字母因数)的**数字系数**,简称**系数**.
上面各式中的系数分别是 3、-5、6.

当一个单项式的系数是 1 或 -1 时,"1"通常略去不写.

注意　单独一个数或字母也认为是单项式. 如 -3、a 是单项式.

单项式中含有两个或两个以上字母时,把其中某一字母的指数叫做关于该字母的**次数**.

单项式中所有字母的次数的和,叫做这个**单项式的次数**.

把次数是 n 的式子叫做 n 次式,把常数看作是零次式.

例如,$3x^2$ 是 x 的二次式; $-5x^3y$ 是四次式,但关于 x 是三次式,关于 y 是一次式; $6xy^3z^2$ 是六次式,但关于 x 是一次式,关于 y 是三次式,关于 z 是二次式; 数字 -3 是零次式.

2. 多项式

几个单项式的和叫做**多项式**. 在多项式中,每个单项式叫做多项式的**项**. 把一个多项式中不同字母的个数,叫做这

个多项式的**元数**. 在多项式中,次数最高的项的次数,叫做这个多项式的**次数**. 把多项式中不含字母的项,叫做**常数项**.

例如,$3x^2+2xy-5y^2+6x-8y+7$ 是二元二次的六项式,7 是常数项.

单项式和多项式统称**整式**.

关于数的运算法则,即

交换法则 $A+B=B+A,\qquad AB=BA;$

结合法则 $(A+B)+C=A+(B+C),(AB)C=A(BC);$

分配法则 $A(B+C)=AB+AC,$

对于整式的运算仍然适用.

把一个整式中的各项按某一字母的次数,从高到低的顺序进行排列,叫做关于该字母的**降幂排列**. 反之,从次数低的项到次数高的项进行排列,叫做**升幂排列**.

3. 整式的加法、减法、乘法

关于两个整式 A、B, $A+B$ 是把 A、B 中的各项相加,如有同类项时合并. $A-B$ 是 A 的各项与 B 的各项变号后全部相加,如有同类项时合并. AB 是 A 中的各项与 B 中的各项分别相乘,把全部乘积相加,如有同类项时合并.

关于某一个字母,如果 A 是 m 次式, B 是 n 次式, 则 AB 相乘后是 $m+n$ 次式.

【公式 1】 乘法公式:

(1) $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2;$

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2;$

(3) $(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA;$

(4) $(Ax+B)(Cx+D)=ACx^2+(AD+BC)x+BD;$

(5) $(A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=A^3\pm B^3$

$$\pm 3AB(A\pm B);$$

(6) $(x+A)(x+B)(x+C)$

$$=x^3+(A+B+C)x^2+(AB+BC+CA)x+ABC;$$

(7) $(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

$$=A^3+B^3+C^3-3ABC;$$

(8) $(A^2+AB+B^2)(A^2-AB+B^2)=A^4+A^2B^2+B^4;$

(9) $(A+B+C)(A+B-C)(B+C-A)(C+A-B)$

$$=2A^2B^2+2B^2C^2+2C^2A^2-A^4-B^4-C^4.$$

【例 1】 设$A=x^3-2+5x^2$, $B=-x+3x^2+1$,计算积AB.

解 把A、B分别按降幂排列整理,然后如下进行计算:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^3 & 5x^2 & & -2 & \\
\times) & 3x^2 & -x & 1 & & \\
\hline
 & 3x^5 & 15x^4 & & -6x^2 & \\
 & & -x^4 & -5x^3 & & 2x \\
+) & & & x^3 & 5x^2 & -2 \\
\hline
 & 3x^5 & +14x^4 & -4x^3 & -x^2+2x & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 1 & 5 & 0 & -2 & & \\
\times) & 3 & -1 & 1 & & & \\
\hline
 & 3 & 15 & 0 & -6 & & \\
 & & -1 & -5 & 0 & 2 & \\
+) & & & 1 & 5 & 0 & -2 \\
\hline
 & 3 & 14 & -4 & -1 & 2 & -2
\end{array}$$

注意 (1) 在进行计算时,要在缺项的地方以 0 补位.

(2) 上面的算式是把数字因数分离出来进行计算的,这种方法叫**分离系数法**.

【例2】 化简下式：

$$[(9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n]^2$$
$$-[(9+4\sqrt{5})^n-(9-4\sqrt{5})^n]^2$$

解 设 $(9+4\sqrt{5})^n=A$, $(9-4\sqrt{5})^n=B$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(A+B)^2-(A-B)^2\\&=4AB=4(9+4\sqrt{5})^n(9-4\sqrt{5})^n\\&=4[(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})]^n\\&=4(81-80)^n=4.\end{aligned}$$

4. 整式的除法

关于含有一个字母 x 的整式 A、B, 当 A 的次数高于 B 的次数(或同次)时，整式 A 除以整式 B，就是求满足等式 $A=BQ+R$ 的整式 Q 和 R. 其中 R 是较 B 低次的整式或是零. 把 Q 叫做 A 除以 B 的**商式**，R 叫做**余式**. 当余式 $R=0$ 时，就说 B 除尽 A，或说 B 整除 A，这时把 A 叫做 B 的**倍式**，把 B 叫做 A 的**约式**或**因式**.

【例3】 计算 $(8a^3-b^3+c^3+6abc)\div(c+2a-b)$（按 a 的降幂排列整理）.

解

$$\begin{array}{r|llll}
 & 4a^2 & +2(b-c)a & +b^2+bc+c^2 & \\ \hline
2a-(b-c) & 8a^3 & & +6abc & -(b^3-c^3) \\
 & 8a^3 & -4a^2(b-c) & & \\ \hline
 & & 4(b-c)a^2 & +6abc & \\
 & & 4(b-c)a^2 & -2(b-c)^2a & \\ \hline
 & & & 2(b^2+bc+c^2)a & -(b^3-c^3) \\
 & & & 2(b^2+bc+c^2)a & -(b^3-c^3) \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

答 商式$=4a^2+2(b-c)a+b^2+bc+c^2$.

【例 4】 计算 $(x^3-6x^2+11x-12)\div(x-2)$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-4x+3 \\ \hline
x-2 & x^3-6x^2+11x-12 \\
 & x^3-2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -4x^2+11x \\
 & \quad -4x^2+8x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3x-12 \\
 & \qquad\qquad 3x-6 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 3 & \\ \hline
1-2 & 1 & -6 & 11 & -12 \\
 & 1 & -2 & & \\ \hline
 & & -4 & 11 & \\
 & & -4 & 8 & \\ \hline
 & & & 3 & -12 \\
 & & & 3 & -6 \\ \hline
 & & & & -6
\end{array}
$$

答 商式$=x^2-4x+3$,余式$=-6$.

5. 有理式、无理式

A、B 是整式,当 $B\neq0$ 时,把形如$\dfrac{A}{B}$的式子叫做**有理式**,或叫做分式. 当 A、B、P、Q 是有理式时,把形如 $A\sqrt{P}+B\sqrt[3]{Q}$ 的式子叫做**无理式**,但$\sqrt{P}$与$\sqrt[3]{Q}$的根号内的P,Q分别不是完全平方式,完全立方式.

6. 等式的性质、种类

把用等号“=”连结起来的两个式子叫做等式.

关于三个式子 A、B、C，有下面的关系式成立：

如果 $A=B$，则 $A+C=B+C$；

如果 $A=B$，则 $AC=BC$；

如果 $A=B, C\neq 0$，则 $\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$.

等式 $A=B$，如果只限于把 A、B 中的字母的某些特殊值代入时成立，则称此等式为**方程式**. 反之，如果等式 $A=B$ 中的字母 A，B 用任何允许值代入都成立时，则称此等式为**恒等式**.

由此可知，前面的公式 1 中各等式都是恒等式.

7. 因式分解

把一个整式化为两个以上的整式的积的形式，叫做整式的**因式分解**.

这里要注意的是，当进行因式分解的整式中含有两个以上的字母时，一般应按次数低的字母加以整理.

我们已经知道，前面的公式 1 中，从左边到右边是乘法公式，因而从右边到左边就可以看做是因式分解的公式.

对整式进行因式分解时，根据系数是在有理数集合内，或在实数集合内，或在复数集合内，分别叫做在有理数集合内、实数集合内、复数集合内的因式分解. 例如，对 x^4-2x^2-3 进行因式分解时：

在有理数集合内分解为 $(x^2-3)(x^2+1)$；

在实数集合内分解为 $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+1)$；

在复数集合内分解为 $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+i)(x-i)$.

由此可知，在系数的不同集合内进行因式分解，其结果是

不同的.

如果没指定在哪个集合内进行因式分解，一般是在实数集合内进行.

8. 综合除法(1)

整式 $A=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$ 除以 $x-\alpha$ 时，设其商式为 Q，余式为 r，并设 $Q=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}$，

则

$$
\begin{aligned}
A&=(x-\alpha)Q+r\\
&=(x-\alpha)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1})+r\\
&=b_0x^n+(b_1-b_0\alpha)x^{n-1}+(b_2-b_1\alpha)x^{n-2}+\cdots\cdots+r\\
&\quad -b_{n-1}\alpha.
\end{aligned}
$$

因为上式是恒等式，所以

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-b_0\alpha,\ a_2=b_2-b_1\alpha,\ \cdots\cdots,\ a_n=r-b_{n-1}\alpha.$$

$$\therefore\quad b_0=a_0,\ b_1=a_1+b_0\alpha,\ b_2=a_2+b_1\alpha,\ \cdots\cdots,$$

$$r=a_n+b_{n-1}\alpha.$$

把这些等式写成如下形式：

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & a_0 & a_1 & a_2\cdots\cdots & a_{n-1} & a_n\\
\alpha & & b_0\alpha & b_1\alpha & b_{n-2}\alpha & b_{n-1}\alpha\\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2\cdots\cdots & b_{n-1} & r
\end{array}
$$

从上述形式可以看出，首先把整式A的系数$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 排成一列，然后在a_0 的下面写上等于a_0 的b_0，在a_1 的下面写上 $b_0\alpha$，$a_1+b_0\alpha$ 是 b_1，在 a_2 的下面写上 $b_1\alpha$，$a_2+b_1\alpha$ 是 b_2. 用这种方法依次得到$b_3, b_4, \cdots\cdots, b_{n-1}, r$. 我们把这种方法叫做**综合除法**.

注意 整式 A 除以 $ax-b$ 时，设其商式为 Q，余式为 r，则

$$A=(ax-b)Q+r=(x-\frac{b}{a})aQ+r.$$

因此可知，整式 A 除以 $x-\frac{b}{a}$ 所得的商式 aQ 再除以 a 就是 Q，其余式仍为 r.

9. 综合除法(2)

整式 $A=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$ 除以 $x^2-\alpha x-\beta$ 时，设其商式为 Q，余式为 $px+q$，并设 $Q=b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\cdots\cdots+b_{n-2}$，则

$$\begin{aligned}A&=(x^2-\alpha x-\beta)Q+px+q\\&(x^2-\alpha x-\beta)(b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\cdots\cdots+b_{n-2})+px+q\\&=b_0x^n+(b_1-b_0\alpha)x^{n-1}+(b_2-b_1\alpha-b_0\beta)x^{n-2}+\cdots\cdots\\&\qquad+(p-b_{n-2}\alpha-b_{n-3}\beta)x+q-b_{n-2}\beta.\end{aligned}$$

由此有

$b_0=a_0$, $b_1=a_1+b_0\alpha$, $b_2=a_0+b_1\alpha+b_0\beta$, $\cdots\cdots$, $p=a_{n-1}+b_{n-2}\alpha+b_{n-3}\beta$, $q=a_n+b_{n-2}\beta$.

依上法，这些等式可以写成如下形式：

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2\cdots\cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n\\
\alpha & & b_0\alpha & b_1\alpha\cdots\cdots & b_{n-3}\alpha & b_{n-2}\alpha & \\
\beta & & & b_0\beta\cdots\cdots & b_{n-4}\beta & b_{n-3}\beta & b_{n-2}\beta\\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & b_{n-2} & p & q
\end{array}$$

【例 5】 把下式分解因式：

$$2ax^2-(3a-2b)xy-3by^2-(5a-2c)x-(5b+3c)y-5c.$$

解法一 原式$=2ax^2-[a(3y+5)-2(by+c)]x$

$$-(3y+5)(by+c)$$

$$=[2x-(3y+5)][ax+(by+c)]$$

$$=(2x-3y-5)(ax+by+c);$$

解法二 原式$=(2x^2-3xy-5x)a+(2xy-3y^2-5y)b$

$$+(2x-3y-5)c$$

$$=(2x-3y-5)(ax+by+c).$$

注意 解法一是关于 x 整理的，解法二是关于 a，b，c 整理的．这样，原式如果含有二种以上字母时，较多的情况下是关于较低次的字母整理．本例中的式子关于 x、y 是二次，关于 a、b、c 是一次．

【例 6】 (1) 把下式分解因式：

$$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.$$

(2) 化简下式：

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$+(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$$
$$+(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)$$
$$-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

解 (1) 原式$=[a+(b+c)][(b+c)a+bc]-abc$

$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$$

$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

(2) 设 $-a+b+c=A$，$a-b+c=B$，$a+b-c=C$，则

$$a+b+c=A+B+C.$$

$\therefore$ 原式$=(A+B+C)BC+(A+B+C)CA$

$$+(A+B+C)AB-ABC$$

$$=(A+B+C)(BC+CA+AB)-ABC$$

$$=(B+C)(C+A)(A+B)=2a\cdot 2b\cdot 2c=8abc.$$

【例 7】 利用综合除法，计算

(1) $(2x^3+7x^2-17x+8)\div(2x-3)$;

(2) $(2x^5-3x^4+5x^3-x^2+4x+1)\div(x^2-2x-3)$.

解 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 7 & -17 & 8 \\
\frac{3}{2} & & 3 & 15 & -3 \\
\hline
2 & 2 & 10 & -2 & 5 \\
\hline
 & 1 & 5 & -1 &
\end{array}$$

答 商式$=x^2+5x-1$，余式$=5$.

(2)

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & -3 & 5 & -1 & 4 & 1 \\
2 & & 4 & 2 & 26 & 56 & \\
3 & & & 6 & 3 & 39 & 84 \\
\hline
 & 2 & 1 & 13 & 28 & 99 & 85
\end{array}$$

答 商式$=2x^3+x^2+13x+28$，　　余式$=99x+85$.

【例 8】 把 x^3+2x^2-4 表示为 $x+3$ 的多项式.

解法一 设 $x^3+2x^2-4=a(x+3)^3+b(x+3)^2+c(x+3)+d$. ①

令 $x+3=y$，$x=y-3$，代入①式，得

$$(y-3)^3+2(y-3)^2-4=ay^3+by^2+cy+d. \quad ②$$

左边$=y^3-7y^2+15y-13$.

因为②式是关于 y 的恒等式，所以

$$a=1,\ b=-7,\ c=15,\ d=-13.$$

$\therefore$ $x^3+2x^2-4=(x+3)^3-7(x+3)^2+15(x+3)-13$.

解法二 利用综合除法

设 $x^3+2x^2-4=a(x+3)^3+b(x+3)^2+c(x+3)+d$,

x^3+2x^2-4 除以 $x+3$，其余式为 d；其商式除以 $x+3$，其余式为 c；这个商式除以 $x+3$，其余式为 b，商式为 a.

所以，常数 a、b、c、d 可用综合除法求得.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & 0 & -4 \\
-3 & & -3 & 3 & -9 \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & \\
 & & -3 & 12 & -13 \\
\hline
 & 1 & -4 & & \\
 & & -3 & 15 & \\
\hline
 & 1 & -7 & &
\end{array}
$$

答 原式 $=(x+3)^3-7(x+3)^2+15(x+3)-13$.

习 题 一

1. 展开下列各式：

(1) $(x+y)^2(x-y)^2(x^2+y^2)^2$;

(2) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;

(3) $(a-1)^3(a^2+a+1)^3$;

(4) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$.

2. 当 $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q}{4}^2+\frac{p}{27}^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q}{4}^2+\frac{p}{27}^3}}$

时，求 x^3+px+q 的值.

3. 求 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8)^4$ 展开式中的 x^3、x^4 的系数.

4. 把下列各式分解因式:

(1) $x^2-xy+2yz-4z^2$;

(2) $x^2-y^2-z^2+2yz$;

(3) $x^2-xy-2y^2+5x-y+6$;

(4) ab^3c^3-a;

(5) $x^3-y^3+3xy+1$;

(6) x^4+4;

(7) $a^2bc+abd+bc-ab^2-ac^2-cd$;

(8) $a^3+(b+2)a^2+(b-1)a+b^2+b-2$;

(9) $a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c+bc^2+2abc$;

(10) $x^3-(a^2+3a+3)x-(a^2+3a+2)$;

(11) $(a+b)c^3-(a^2+ab+b^2)c^2+a^2b^2$;

(12) $x^4+2x^2-4ax-a^2+9$.

5. 把 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 中的 a,b,c 分别用 $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ 代换,问代换后的式子的值是原式的值的多少倍.

6. 化简下式:

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3.$$

7. 试确定使x^3+ax^2+x+b能被x^2+2x-1除尽的a、b的值.

8. 试确定使下列关于 x 的等式能为恒等式的常数 a、b、c、d 的值:

(1) $2x^3-3x^2-26x-12=a(x+2)^3+b(x+2)^2+c(x+2)+d$;

(2) $3x^3-x+2=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$.

9. 已知 $f(x)=x^2+px+q$, 当 $f(x^2)$能被 $f(x)$ 除尽时, 求