

河道及近海水流 的数值模拟

• 槐文信 赵明登 童汉毅 编著



科学出版社
www.sciencep.com

河道及近海水流的数值模拟

槐文信 赵明登 童汉毅 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

河道及近海水流的数值模拟是研究河流及近海水域在自然情况下或修建整治建筑物后河道及近海工程的重要手段之一。本书系统地介绍了河道一维、二维、三维水流数学模型及近海三维水流水质数学模型基本原理、数值解法及典型的检验算例和工程应用实例。全书内容注重理论结合实际,包含了作者多年从事河道及近海水流数学模型的研究成果,以及国内外的主要最新成果。

本书可供水利水电、环境、航运等部门的科研及设计人员阅读,亦可供大专院校、相关专业的教师和研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

河道及近海水流的数值模拟/槐文信,赵明登,童汉毅编著. —北京:科学出版社, 2005

ISBN 7-03-014728-6

I. 河… II. ①槐… ②赵… ③童… III. ①河道-水流模拟: 数值模拟 ②近海-水流模拟: 数值模拟 IV. TV131.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 003064 号

责任编辑: 胡 凯/责任校对: 刘小梅

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 5 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2005 年 5 月第一次印刷 印张: 15 1/4

印数: 1—2 500 字数: 288 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换 (环伟))

序

随着经济发展和工程需要,近二三十年来河流-海岸流体流动的数值模拟日益兴旺起来。它涉及很多领域,如水环境、湖泊、水库、河流开发利用,港口建设,航运交通,过江隧道、管道输运,核电站、火电站的防洪与取排水等。

本书是几位作者在这方面的学术专著,既有理论阐释,又包含他们多年来的工作总结与最新应用。

书中对于流体传输的物质对流扩散现象,给予特别的关注,这一实质性的又非常广泛的流体运动形式包含在广义的对流、扩散方程中。对反映波动现象的双曲型方程,特征线理论与迎风效应做了有效的处理,在应用方面也有成功的实例,如流动演进。

在计算方法方面,书中讨论了流体计算的各种方法,特别是具有特色的有限分析法,它具有高精度、稳定性好和自动迎风效应的优点。作者对它做了创造性的发展与改进。

计算流体是实用性很强的学科。作者近年来在应用方面做了大量的新的有意义的工作。涉及浮力射流、水环境中的浓度场、河流湖泊中的温度场、渗流问题、渭河洪水演进和河口潮汐流动等。

虽然许多实际流体问题在无法求得分析解时可以求助于数值方法,但问题的解决,仍需要理论分析、实验研究和数值计算相结合,相辅相成才能获得长足的进展。作者很重视这一客观事实,在书中数值计算的结果往往都有理论分析与实验资料作比较、验证。

本书有坚实的理论,翔实的资料,广泛而又有趣味的实际算例,可以作为高年级大学生及研究生的教材,也是有关专业工程技术人员学习关心该学科新近发展的一本好的专著。

由于河流与河口的数值模拟内容极为丰富,应用也非常广泛,并在不断地创新。特此向广大读者引介推荐。

郑邦民

2004年6月

前 言

从古至今，人类对自然界水流运动规律的认识和研究就没有停止过。随着科学技术的不断发展和进步，人与自然的关系越来越密切，人类研究自然的方法和技术越来越先进，人类的发展进步也越来越依赖于对自然规律的认识。水流的数值模拟，作为人类研究水流运动规律的一个重要手段，以其费用低、速度快及适应性好的优势，从 20 世纪 60 年代以来得到长足的发展。数学模型、数值计算方法是水流数值模拟的理论基础和技术手段。计算机流动显示是运用现代计算机软件技术，将数值计算的结果真实、直观地展现出来，近几年在水流数值模拟领域受到高度的重视并取得较快的发展。

本书是作者近年来将数值模拟方法运用于河道及近海水流的工作总结。对椭圆型、抛物型和双曲型 3 种类型的水流控制方程及数学模型均有涉及。特别对紊流问题的标准的 $k-\epsilon$ 模型有较为详细的描述。数值方法主要介绍了有限差分法、有限分析法和混合有限分析方法。给出了上述数值模拟方法在浮力射流、水环境中的浓度场、河流湖泊中的温度场、渗流问题、河道洪水演进和河口潮汐流动等工程实际问题中的应用。对计算机流动显示技术及其在工程实际问题中的应用做了初步的探讨。作者期望通过对于上述内容的介绍使读者对河道及近海水流的数值模拟方法有进一步的了解。

本书中一些内容的研究得到国家自然科学基金的资助，本书的出版得到水资源与水电工程科学国家重点实验室及教育部水沙科学重点实验室的资助，在此一并致谢。

本书曾作为水力学及河流动力学专业和港口海岸及近海工程专业研究生的教材进行讲授。由于作者水平有限，书中错误在所难免，欢迎读者和同行批评指正。

作 者

2004 年 6 月于武汉大学

目 录

第一章 绪论	1
第二章 有限差分法	7
2.1 有限差分法的基本思想	7
2.2 差分格式的三个基本性质	13
2.3 双曲型方程的差分解法	15
2.4 抛物型方程的差分解法	24
2.5 椭圆型方程的差分解法	34
第三章 有限分析法	41
3.1 有限分析法的基本原理	41
3.2 椭圆型偏微分方程的有限分析解	43
3.3 抛物型偏微分方程的有限分析解	50
3.4 高维偏微分方程的有限分析法	52
3.5 非规则区域拉普拉斯方程的有限分析解	54
3.6 求解二维扩散方程的有限近似解法 (FPM)	62
第四章 混合有限分析法	70
4.1 一维线性对流扩散方程的混合有限分析法	70
4.2 二维非恒定对流扩散方程混合有限分析格式	75
4.3 二维定常对流扩散方程的混合有限分析 5 点格式	78
4.4 三维非恒定对流扩散方程混合有限分析 8 点格式	82
4.5 三维对流扩散方程的混合有限分析 19 点格式	84
第五章 河道水流数值模拟	91
5.1 河道一维恒定流数值模拟	91
5.2 复式断面河道的流量估计	101
5.3 河道一维非恒定流的数值模拟	110
5.4 河道二维非恒定流的计算	138
5.5 河道复式断面二次流的数值模拟	167
5.6 河道热污水排放近区三维流动的数值计算	173
第六章 近海水流数值模拟	181
6.1 三维浅水流动基本方程	181
6.2 σ 坐标系下的三维浅水流动方程	182

6.3	模型及方法验证·····	187
6.4	紊流流动的数学模型·····	190
6.5	σ 坐标系下流动的数学模型及其计算方法·····	194
6.6	数学模型的验证·····	204
6.7	流动环境中矩形出口射流的数值模拟·····	213
参考文献	·····	233

第一章 绪 论

1. 河道及近海水流的流动

河道及近海是人类生产活动的主要空间之一,由于受多种因素的影响,河道水流具有随时空变化的性质。对于河道水流,由于河道几何形状的不规则性,以及来流随时间和空间的变化,均会导致水流的复杂多变,表现在流量、流速分布和水深等水力要素随时空而异;就水流的流态而言,天然河道大多呈现紊流状态。而近海水流,除上述影响因素外,还有潮汐和波浪的作用,运动要素也均随时空变化。

在河流上修建水利工程、治河防洪工程或其他工程建筑物后,受建筑物的干扰,水流又将发生新的变化。在枢纽的上、下游河段,河床会淤积或者冲刷。要有成效地整治河流,达到兴利除害的目的,必须掌握水流运动的规律。

河口海岸的发展与演变主要以泥沙的输移与沉积为媒介,并对区域影响范围内的人类社会经济活动产生巨大影响。泥沙的输移沉积直接关系到河口挡潮闸、海港、沿海城市防洪等实际工程的设计、建设、运行和管理;泥沙的输移对河口海岸的生态环境有重要影响,关系到海洋生物及渔业生产;泥沙的输移也与沿海湿地的形成、发展和消亡有关,因为湿地的淤长和蚀退都与河道径流挟带的陆地泥沙在河口的沉积及其再搬运有关;泥沙的输移与沉积还对河口海岸航道的变化及维护有直接的影响。而输运泥沙的载体就是水流,因此,研究并掌握河口海岸地区水流的运动规律就有极为重要的实际指导意义。

本书的着眼点在于水流的数值模拟,水流是污染物或泥沙的载体,研究水流的运动规律可为污染物或泥沙的研究奠定基础,而水沙的模拟可参阅相关的专著或教材。

2. 河道及近海水流模拟的任务

河道及近海水流的模拟主要是针对河道及近海工程所要解决的问题而展开的数值模拟研究工作。例如,航道改善方案的优化;在河道中的拦河筑坝,对淹没区范围的估计,筑坝后若某种原因引起溃坝而产生的洪水演进的预报,洪泛区的洪水推进等;在河道中污染物的排放所引起的污染范围和浓度场;核电站废热水排放所产生的热污染场;在河口区域中盐水楔的上溯、在近海区域中水流的流场情况和污染物的浓度场等等都是人们需要关注的问题。概括起来就是要预报水流的流场和浓度场等的时空分布,也就是速度场 $u_i(t, x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$)、压强场 $p(t, x,$

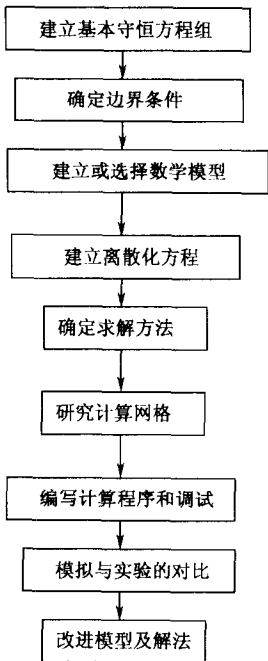
y, z)、浓度场 $C(t, x, y, z)$ 和温度场 $T(t, x, y, z)$ 。因此河道及近海水流模拟的任务是,对给定的几何形状、尺寸及边界条件下,给出如下预报:

- (1) 流场:速度及压强、湍流强度及尺度随时空的分布等;
- (2) 温度场:温度随时空的变化;
- (3) 浓度场:在污染物排放近区和远区浓度随时空的分布。

3. 模拟方法的发展与数值模拟的步骤

模拟(modeling 或 simulation)一词在不同时期,不同人对其有不同的理解。在 20 世纪 60 年代以前,不少人把模拟仅仅理解为按照相似律制作成小的实验模型的方法,或者也包括不符合相似律的用水流或气流定性显示的实验方法。当然这种方法在过去、现在甚至将来也不失其重要作用,但这类方法有其明显的缺陷。如对于复杂的流动过程,要做到流动完全相似,至少需要满足若干种准则数的相等,这在古典的水力学相似理论中早有阐述,然而实际上要维持所有的这些准则数的相等是无法办到的。因此,往往不得不忽略一些准则数,而保持主要的准则数的满足。这就使得实验模型充其量在定性上与原型相似,甚至会在定性上失真。

随着对流动认识的提高、计算数学和计算技术的发展,20 世纪 70 年代末以来,数值模拟得到了迅猛的发展,并且愈来愈得到人们的承认和接受。随之就有了零维模拟、一维模拟、二维模拟和三维模拟。甚至还有“一维半”或“准二维”、“准三维”的模拟。



本书所讨论的数值模拟是基于计算水力学、计算传热学的原理,用数值方法不经过任何简化直接求解非线性联立的质量、动量、能量以及组分守恒的偏微分方程组。只有这种模拟才能预报流动、传热和传质过程的细节,才能给出整个流场中各变量的时空分布。因此,这种模拟已开始成为并将继续作为河道及近海工程的定量设计及方案优化的有力工具。

经过多年的探索和研究,数值模拟已经取得了许多成功经验。其具体的操作步骤可概括为框图 1.1。由图可见,发展数值模拟,特别是复杂得多影响因素流动的数值模拟,不仅仅是计算方法和计算技巧问题(当然此两者也很重要),它还包含一整套物理过程的理论基础,也包括深入细致的实验量测,即物理模拟。对于数值模拟的建立则是一个反复的理论设想、计算实践与实验量测三者相互校核的最终结果。这样建

图 1.1 框图

立的数值模拟才具有足够的可靠性,才能具有实用价值。由此看来,对于水利工作者来说,物理实验、理论分析和数值模拟都很重要,这三个方面相互依赖、相互补充,共同发展。

4. 河道及近海水流控制方程

水流控制方程是在对客观物理现象进行概括、抽象、简化的基础上依据质量守恒定律、牛顿第二定律和能量守恒定律等基本原理而得到的。下面就控制河道及近海水流的基本方程予以介绍。

(1) 三维流动的基本方程

(a) 连续性方程

连续性方程是质量守恒原理在流动问题中的表述,对于不可压缩流体以微小控制体为对象,有

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

式中, u_j (或 u, v, w) 分别为 x_j (或 x, y, z) 三个方向的流速分量。

(b) 动量方程

动量方程是牛顿第二定律或动量守恒定律在流体流动问题中的表述,分析微小控制体受力和运动情况,可得到不可压缩牛顿流体在 x, y, z 方向应该满足的方程,其张量形式和微分形式为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1.2b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1.2c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial wu}{\partial x} + \frac{\partial wv}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (1.2d)$$

式中, $F_i = (X, Y, Z)$ 为单位质量力沿 x, y, z 三个方向的分量; p 为压强。这也就是著名的纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程。

(c) 紊流的时均方程

对于 Navier-Stokes 方程作时均演算,且采用 Boussinesq 关于紊流黏性系数的假设,可得到紊流时均运动的动量方程,即 Reynolds 方程,其张量形式为

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu_t \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.3)$$

上式中字母上方的横线表示时均值, ν_t 为紊动黏性系数。根据确定 ν_t 方法的不

同,可以将紊流模型区分为所谓的零方程模型、一方程模型及两方程模型等。现简要介绍河道及近海水流模拟中应用较广的零方程模型和两方程模型。

(i) 零方程模型

若是通过代数关系而不是新增加描述紊流运动特征的偏微分方程来确定紊动黏性系数 ν_t , 则这类紊流模型被称为零方程模型。在以往的河流工程数值模拟中, 确定 ν_t 的方法有两种, 一是 ν_t 为常数; 二是采用普朗特混合长模型。两种方法均为零方程模型, 而第一种方法则是零方程模型中最简单的一种。

普朗特仿照分子运动论中自由长度的概念, 提出了紊流中涡团混合长度的概念, 认为紊动涡黏系数 ν_t 可写为

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (1.4)$$

其中, \bar{u} 为主流时均速度; y 是与主流方向相垂直的坐标; l_m 为混合长度, 该值的确定比较复杂, 常与流动类型有关。但必须指出的是混合长度理论是基于紊流局部平衡的假定基础上的, 在物理概念上有一定的不足。

(ii) 两方程紊流模型

两方程紊流模型是所有紊流模型中最简单的完全模型。紊动能 k 及紊动能耗散率 ϵ 的方程依次为

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \epsilon) \quad (1.6)$$

$$P_k = - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (1.7)$$

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \epsilon \quad (1.8)$$

在 $k-\epsilon$ 模型中引用了 5 个模型常数, 其值依次为 $C_\mu = 0.09$, $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\epsilon = 1.3$ 。

上述模型又称为标准的 $k-\epsilon$ 模型, 是以各向同性紊动黏性为基础的, 因此对各向异性紊流模拟的预报能力较差, 为此研究者针对不同的物理问题还提出了各种各样的修正 $k-\epsilon$ 模型。

(2) 二维流动控制方程

若对于河口或大型水库, 往往垂向加速度与重力加速度相比很小可以忽略, 从而可假定压强沿水深的分布为静压分布, 另外往往也需要考虑地球自转引起的科里奥利(Coriolis)力的作用, 为此在水平的两个方向上的动量方程中分别加上科里奥利力分量, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (1.11)$$

$$p = \rho gh \quad (1.12)$$

式中, f 为科里奥利力系数, $f = 2\omega \sin \Psi$, ω 为地球自转角速度, Ψ 为当地纬度。

在宽浅水域中, 流动特征值可用水深平均的物理量表示, 将三维流动的基本方程组式(1.1)、(1.2)沿水深积分, 再沿水深取平均, 同时考虑底部阻力和表面风力的影响, 得到水深平均的二维流动控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU_x}{\partial x} + \frac{\partial HU_y}{\partial y} = 0 \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial HU_x}{\partial t} + \frac{\partial HU_x U_x}{\partial x} + \frac{\partial HU_x U_y}{\partial y} &= fHU_y - gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} - g \frac{n^2 U_x \sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{H^{1/3}} \\ &+ \nu_t \left(\frac{\partial^2 HU_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 HU_x}{\partial y^2} \right) + C_w \frac{\rho_a}{\rho} w^2 \cos \beta \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial HU_y}{\partial t} + \frac{\partial HU_x U_y}{\partial x} + \frac{\partial HU_y U_y}{\partial y} &= -fHU_x - gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} - g \frac{n^2 U_y \sqrt{U_x^2 + U_y^2}}{H^{1/3}} \\ &+ \nu_t \left(\frac{\partial^2 HU_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 HU_y}{\partial y^2} \right) + C_w \frac{\rho_a}{\rho} w^2 \sin \beta \end{aligned} \quad (1.15)$$

式中, U_x , U_y 分别为 x , y 方向沿水深平均的流速, H 为水深, ζ 为自由面相对高度, n 为底部糙率, ν_t 为涡黏系数, ρ_a 为大气密度, C_w 为风应力系数, w 为水面上 10m 高处的风速值, β 为风向与 x 坐标轴的夹角。

(3) 总流的一维流动控制方程

对于渐变流, 沿流程 s 方向上取 ds 微元为控制体, 基于质量守恒、动量守恒定律, 并引进渐变总流静压分布的特性以及速度沿断面均匀分布的假定, 可得明槽一维流动的控制方程为

连续性方程

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (1.16)$$

动量方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(vQ)}{\partial s} + gA \frac{\partial z}{\partial s} + gA \frac{Q^2}{K^2} = 0 \quad (1.17)$$

式中, A 为过水断面面积; Q 为流量; z 为水位; v 为断面平均流速; $K = ACR^{1/2}$ 为流量模数; C 为谢才系数; R 为水力半径。以上两式就称为明槽渐变总流一维基

本方程组,即著名的圣·维南(Saint-Venant)方程组。

(4) 输移扩散方程

水流的温度 T 、含沙量 S 、污染物浓度 C (可统一由变量 ϕ 表示) 等在水流中由于水流扩散的影响在时间和空间上的变化可描述为

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\phi} \bar{u}_i) = D_{ij} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x_i \partial x_j} + \bar{S}_\phi \quad i, j = 1, 2 \quad (1.18)$$

式中,字母上方的横线表示时均值, D_{ij} 为扩散系数; \bar{S}_ϕ 为源项。

(5) 方程组形式上的一致性

在基本方程(1.1)~(1.3)、(1.5)、(1.6)、(1.10)、(1.11)、(1.13)~(1.15)和(1.18)中,每个方程均由4种类型的项构成,依次为非恒定项、对流项、扩散项及源项。因此,基本方程可以用统一的形式表示出来,即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (1.19)$$

式中, ϕ 代表待求的未知量; Γ_ϕ 是对应于 ϕ 的扩散系数; S_ϕ 为源项。对应于特定意义的 ϕ , Γ_ϕ 和 S_ϕ 具有特定的形式。

把控制方程写成统一格式带有人为的因素,是出于便于求解的需要而为之的。各个方程之间的差别从数学观点来看仅在于源项。这就使得我们在构造方程时可以将精力集中于源项。在求解方程时,可针对统一形式选用计算方法和编制程序。对于不同的 ϕ ,只要重复调用该程序,并给定 Γ_ϕ 和 S_ϕ 的适当表达式以及适当的初始条件和边界条件,便可求解。

第二章 有限差分法

2.1 有限差分法的基本思想

当运用传统的数学分析方法求解一个适定的定解问题遇到困难时,数值方法的优点就显现出来了。差分法是数值方法中的主要手段之一,它的优点是通用性强,即适应面广,而且方法简单,便于掌握。

差分法的基本思想是将求解区域分为差分网格,用有限个网格结点(或称为离散点)来代替连续的求解区域,然后将偏微分方程的导数用差商来代替,推导出含有离散点上的有限个未知数的差分方程组(即代数方程组)。求出代数方程组的解,将其作为微分方程定解问题的数值近似解。它是一种直接将微分问题转化为代数问题的近似解法。

然而,用来代替微商的方法有许多种,同一个微分方程(组)由于采用的差分形式不同,可以得到不同的差分方程组(称为差分格式)。又因为差分方程终究并不等同于微分方程,由此引出诸如差分格式的误差、精度、相容性、收敛性、稳定性等问题,这些将在以后介绍差分格式时逐一叙述。

2.1.1 有限差分逼近

差分法用差商近似代替微商,微商是差商的极限。其理论依据可以从泰勒级数展开和数值积分方法得到解释。例如,对于一阶导数 du/dx ,可用下列几种差商近似,如图 2.1 所示。

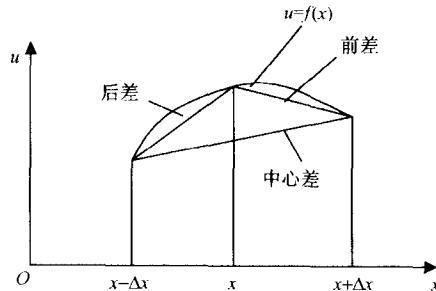


图 2.1

(1) 前差商(右差商)

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

(2) 后差商(左差商)

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

(3) 中心差商

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.3)$$

(4) 二阶差商

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_x &= \frac{\frac{du}{dx}(x) - \frac{du}{dx}(x - \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

(5) 一阶和二阶偏差商

对于多元函数 $u(x, y, t)$ 则用偏差商来逼近偏导数, 对空间、时间的偏导数也有 3 种主要差商(差分)形式, 例如对时间的向前差分为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2.5)$$

对空间 x 的向后差分为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (2.6)$$

对空间 x 的二阶差分为

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.7)$$

式中, n 表示 $n\Delta t$; i, j 表示 $(i\Delta x, j\Delta y)$ 位置; $u_{i,j}^{n+1}$ 表示时刻为 $(n+1)\Delta t$, 位置为 $i\Delta x, j\Delta y$ 的 u 值。

(6) 逼近误差和差商精度

用差商近似微商而带来的误差称为逼近误差。通过泰勒级数展开, 可导出其逼近误差。假定 $u(x, t)$ 具有任意阶偏导数, 这样 u_{i-1}^n, u_{i+1}^n 的泰勒级数展开式(保留三阶项)为

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n \cdot (\Delta x) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n \cdot (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n \cdot (\Delta x)^3 + O[(\Delta x)^4] \quad (2.8)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n \cdot (\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n \cdot (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^n \cdot (\Delta x)^3 + O[(\Delta x)^4] \quad (2.9)$$

式中, $O[(\Delta x)^4]$ 表示展开式后面高于 $(\Delta x)^4$ 的所有高阶项,则前差商为

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^3] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

因此用前差商近似微商是舍去了含有因子 (Δx) 以后的所有高阶项而得到的,通常称前差商的逼近误差为 $O(\Delta x)$ 。同理,后差商的逼近误差也为 $O(\Delta x)$ 。而对于中心差商的逼近误差为 $O[(\Delta x)^2]$,因为从式(2.8)和(2.9)容易有

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^4] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^2] \end{aligned} \quad (2.11)$$

二阶差商的逼近误差同样为 $O[(\Delta x)^2]$,从式(2.8)和(2.9)容易有

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i^n + O[(\Delta x)^2] \quad (2.12)$$

由此可见,不同的差商的逼近误差不同。前差商和后差商其逼近误差为 $O(\Delta x)$,则称前差商和后差商具有一阶精度,中心差商和二阶差商其逼近误差为 $O[(\Delta x)^2]$,则称中心差商和二阶差商具有二阶精度。

2.1.2 差分格式的举例

将微分方程中每一微商用相应的差商来代替,就可以得到在每一网格点上相应的差分方程式。逼近微分方程的差分方程和逼近微分方程定解条件的公式一起,称为微分方程定解问题的差分格式。现以一维对流方程的初值问题为例,来说明差分格式的构造

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \quad (2.13)$$

$$u(x, 0) = F(x)$$

在时间与空间上可取不同的差商来逼近,而得到不同的差分格式。对此问题这里给出3种差分格式。

A格式为在时间上取前差商,空间上取中心差商,代入式(2.13)得

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2(\Delta x)} = O[\Delta t + (\Delta x)^2] \quad (2.14)$$

$[\Delta t + (\Delta x)^2]$ 表示该格式的逼近误差。则差分格式A格式的差分方程为

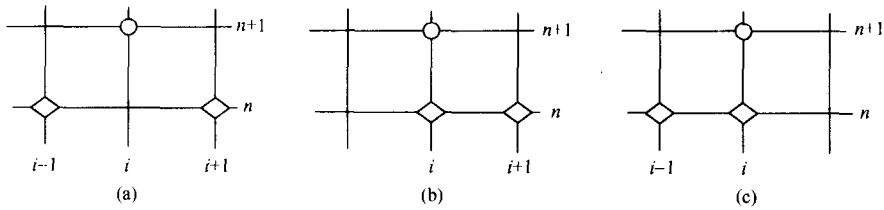


图 2.2

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2(\Delta x)} = 0 \quad (2.15a)$$

将式(2.15a)与(2.14)比较,式(2.15a)舍去了式(2.14)中的逼近误差,以后将其称之为截断误差,写成 $R_i^n = O[\Delta t + (\Delta x)^2]$,式(2.15a)可以进一步写成求解式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (2.15b)$$

A 格式可表示为图 2.2(a),即由已知的 n 时层上 $i-1, i+1$ 两点求未知的 $n+1$ 时层上的 i 点。并且从式(2.14)可看出,该格式具有对时间差商的一阶精度和空间差商的二阶精度。

B 格式在时间和空间上都取前差商,代入式(2.13)得

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = O(\Delta t + \Delta x) \quad (2.16)$$

则得到差分格式 B 格式为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.17a)$$

写成求解式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (2.17b)$$

从式(2.16)来看, B 格式具有时间和空间的一阶精度。其格式如图 2.2(b)所示,它是由 n 时层上的 $i, i+1$ 两点求 $n+1$ 时层上的 i 点。

C 格式在时间上取前差商,空间上取后差商,同样分析得到其差分格式为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.18a)$$

写成求解式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (2.18b)$$

C 格式具有时间和空间的一阶精度。其格式如图 2.2(c)所示,它是由 n 时层上的 $i, i-1$ 两点求 $n+1$ 时层上的 i 点。