高等数学

（经济、管理等文科专业适用）

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学

（经济、管理等文科专业适用）

孙淑华　姚文起　编

张国楚　主审

机械工业出版社

本书是作者在多年从事经济、管理等文科专业的高等数学的教学基础上编写而成的，内容包括一元、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程。

作者在内容和难易程度上充分考虑了文科类高等数学的教学特点，既删除了较艰深的理论推导，又保持了理论体系的连贯和完整；对微积分产生和发展历史作了简要的论述，着重培养逻辑思维能力；增加了大量微积分处理经济问题的例题和习题；对极限一章作了大幅度的调整，在多元微积分部分对空间解析几何内容作了较多删减。

本书适合作为经济、管理等文科专业的本科生、专科生教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/孙淑华，姚文起编．—北京：机械工业出版社，2004.9

普通高等教育基础课规划教材．经济、管理等文科专业适用

ISBN 7-111-15132-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①孙…②姚…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 084796 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：郑　玫　版式设计：霍永明　责任校对：张莉娟

封面设计：饶　薇　责任印制：洪汉军

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 9 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·11.5 印张·445 千字

定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前　言

文理渗透已经成为当今高等数学教育的主要趋势，然而，目前国内专门为文科教学编写的高等数学教材相对较少，而且教育部尚未制定统一的文科高等数学教学大纲．本书是作者在多年从事经济、管理等文科专业教学的基础上编写而成的，内容包括一元、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程，同时各节后附有习题，各章后有复习题，书后给出了部分习题答案．本书主要有以下特点：

作者在内容和难易程度上充分考虑了文科类高等数学的教学特点，既删除了较艰深的理论推导，又保持了理论体系的连贯和完整．

通过对微积分产生和发展历史的简明论述，着重强调课程内容在现代科学中的思想性，有利于培养和发展学生的逻辑思维能力．

为适合经济、管理等文科类专业教学需要，增加了大量用微积分处理经济问题的例题和习题，有助于发展学生用数学思想和方法解决实际问题的能力．

在极限部分，为了便于学生掌握极限的概念，对极限这一章进行了大幅度的调整．在多元微积分部分，对空间解析几何的内容作了较多的删减．

衷心感谢本书主审张国楚教授，他详细审阅了全部书稿，并提出了宝贵意见．燕山大学田乃硕教授、徐玉民教授、赵来玉副教授在本书的撰写过程中给予了许多具体的指导和帮助，在此向他们深表谢意．

由于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，望广大读者和同行专家批评指正．

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，所以说掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键．连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数发展简史，函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为以后学习打下必要的基础．

第一节　函　　数

"自然界的一切归根到底是辨证地而不是形而上学地发生的．"人们观察到的一切现象都是物质运动的各种形式，从庞大的宇宙到物质的极微小粒子，从无机界到有机界，从生物界到人类社会，直至人的思维，无不在运动着，无时不在变化、发展着，整个宇宙就是这样"一幅由种种联系和相互作用，无穷无尽地交织起来的画面，其中没有任何东西是不动的和不变的，而是一切都在运动、变化、产生和消失"．因此，人们只有从物质世界的运动、变化发展中去认识它，才能获得科学的结论．数学科学是由常量数学发展到变量数学的，是人们对自然界认识的逐步深入的结果．

由于 17 世纪天文、力学及航海事业的发展，数学科学领域已经接触到一些具体的函数，如对数函数、指数函数与三角函数等．在 17 世纪早期，特别是伽利略(Galileo)给太阳中心论增添了证据之后，开普勒(Kepler)的天文学已为一般人所接受，虽然他的椭圆运动定律只是近似的，但是人们已经考虑任何两个物体之间的引力概念了．

改进天文学理论，还有一个实用的目的，那就是为了寻找原料通商，为此要进行大规模、对看不见陆地的长距离航海，故需要准确测量经度和纬度的方法．

许多科学家，包括牛顿(Newton)都研究过这个问题．数学科学就是从运动的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的二百多年里，这个概念在几乎所有的科学研究中占据中心位置．伽利略的力学著作《两门新科学》一书，几乎从头至尾包含着这个概念，如"从静止状态开始以定常加速度下降的物体，其经过的距离与所用时间的平方成正比"，只差用符号形式来表达函数这短短的一步了．

牛顿于 1665 年开始微积分的研究工作之后，一直用"流量"一词来表示变量．

莱布尼兹(Leibniz)在其 1673 年的一篇手稿中曾用"函数"一词来表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量，如切线、法线、次切线的长度以及纵坐标等．

在符号方面，最先是约翰·伯努利(John·Bernoulli)利用 X 或 ξ 表示一般的 x

的函数. 1718 年他又改用为 φx 了;莱布尼兹也同意这样做,并提出了用 x^1、x^2 等表示 x 的函数,其上标用以表示函数的不同.

马克思从 19 世纪 50 年代后开始研究数学,他是由一个实例给出函数概念的. 马克思在他的《数学手稿》中写到:“求两个正整数,其和等于 10,于是我们就有问题①$x+y=10$,②$r=10-y$,这里只需限定 y 为正整数. 于是,在这里未知量 x 的值依赖于未知量 y 的值,并且根据 $y(1\leqslant y\leqslant 9)$的取值而变化. 这就是普通代数学内提供的一个未知量标志为另一个未知量的函数的第一个起因. $f(y)$或 x,它是未知量 y 的函数,根据未知量 y 的变化而改变它的值. ”我们可以看出马克思关于函数的概念与今天的函数定义基本上一致.

一、区间、绝对值、邻域

(一) 区间

在研究函数等问题时,经常遇到不等式,为了便于理解,首先介绍一下区间的概念.

满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集合称为**开区间**,用(a,b)表示,它在数轴上表示点 a 与点 b 之间(但不包括点 a 与点 b 两点)的线段.

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合称为**闭区间**,用$[a,b]$表示,它在数轴上表示点 a 与点 b 之间(包括点 a 与点 b 两点)的线段.

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 的集合称为**半开区间**(或称为**半闭区间**),分别用$(a,b]$、$[a,b)$表示.

满足不等式 $x>a$、$x\geqslant a$、$x<a$、$x\leqslant a$ 及 x 可取任何实数值的集合均称为**无穷区间**,它们分别用$(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,a)$,$(-\infty,a]$以及$(-\infty,+\infty)$表示.

(二) 绝对值

定义 实数 a 的绝对值记作$|a|$,规定

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

(1) 有关绝对值,有下列结论:

1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;

2) 若$|x|<\varepsilon(\varepsilon>0)$,则$-\varepsilon<x<\varepsilon$,其逆命题亦真;

3) 若$|x|>N(N>0)$,则 $x<N$ 或 $x<-N$,其逆命题亦真.

(2) 有关绝对值还有下列运算规则:

1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$(a、b 为任意实数);

2) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$(a、b 为任意实数);

3) $|ab|=|a|\cdot|b|$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}(b \neq 0).$$

（三）邻域

定义 设 a 为一个实数，$\delta>0$，那么对于满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的全体，叫做**以 a 为中心的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

$U(a,\delta)$ 也可用开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 表示.

因为 $|x-a|<\delta$ 又可以写成如下形式：

$$a-\delta<x<a+\delta$$

所以，点 a 的 δ 邻域在数轴上表示成以点 a 为中心，宽度为 2δ 的开区间，如图 1-1 所示.

有时要用到的邻域需要把邻域中心去掉. 将点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 的去心邻域 δ**，记作 $\dot{U}(a,\delta)$，即

$$\dot{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$.

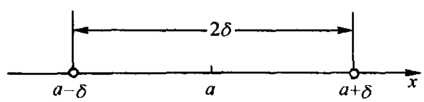

图 1-1

例 1 把 -2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域表示成开区间.

解 因为 -2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域可表示为

$$|x-(-2)|<\frac{1}{3}$$

所以有

$$-\frac{1}{3}<x+2<\frac{1}{3}$$

也就是

$$-\frac{7}{3}<x<-\frac{5}{3}$$

即表示成开区间为 $\left(-\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

二、常量、变量、函数概念

（一）常量、变量

“无论什么事物的运动都采取两种状态，相对静止的状态和显著地变动的状态.”因此，当事物处于相对的静止状态时，事物的某一方面或某几个方面的量可以相对地保持一定的数值不变. 如圆周长 $C=2\pi R$，其中圆周率 π 是在求圆周长时保持不变的量，再如重力加速度 g 等. 这种相对地保持一定数值而不变的量在数学上就称之为**常量**. 因此，所谓常量乃是客观事物处于相对的静止状态在数量关系上的反映. 当事物的运动处在显著地变化的状态时，事物的某些量也就必然

发生变化. 事物的运动、变化首先表现为一定数量上的变化,这些变化着的量在数学上就称之为**变量**.所谓变量乃是客观事物采取显著地变动的状态时在数量关系上的反映. 因此,无论是常量还是变量,都是客观事物处于运动状态时在数量关系上的反映.

显然,变量与常量既有区别,又有联系,并且在具体到某一个量时,在不同的条件下又可以互相转化. 如重力加速度 g,一般地取 $g=9.8\text{m/s}^2$,在研究问题时如果是在地面附近或在不太大的地面范围内,g 的变化极其微小,我们就认为 g 是一个常量,如在一般力学中即是如此.若是条件变化了,g 的变化是很显著的,如发射人造地球卫星,回收人造地球卫星时就要考虑 g 的变化,这时 g 就是变量. 因此,常量与变量之间并不存在不可逾越的鸿沟. 也就是说,判断一个量是常量还是变量,要具体问题具体分析,它们既有严格的区别,又有紧密的联系,且在一定的条件下又是可以互相转化的.

(二) 函数关系

为了更好地理解函数的实质,就必须先研究函数关系. 所谓函数关系就是客观事物之间的普遍联系与互相制约在数量关系上的反映.

两个相互对立而又相互依赖的变量,虽然都在变化,但是它们所处的地位不一样. 如在带轮传动装置中设主动轮转速为 v_1,直径为 d_1,从动轮的转速为 v_2,直径为 d_2. 若令 v_1、v_2 为常量,d_1、d_2 为变量,用 x 表示主动轮直径,y 表示从动轮的直径,显然 x、y 这两个变量是不能随意变,且这两个变量是有联系的. 又有 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{y}{x}$,由此有 $y=\frac{v_1}{v_2}x$,因为 v_1、v_2 是常数,故 $\frac{v_1}{v_2}$ 还是常数,用 v 表示,且当 $v=5$ 时,得 $y=5x$,该式为 x、y 两个变量之间的关系式,并反映出 x、y 之间的相互依赖、相互制约的关系. 在数学上这种变量之间互相依赖、互相制约的关系叫做**函数关系**.

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是非空实数集合. 如果对于每个实数 $x\in D$,变量 y 按照一定的对应关系总有惟一确定的实数与之对应,则称 ***y* 为 *x* 的函数**,记为 $y=f(x)(x\in D)$. x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**,集合 D 叫做这个函数的**定义域**.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,例如 φ、F,这时函数就记为 $y=\varphi(x)$、$y=F(x)$,有时也记为 $y=y(x)$.

如果 f 表示的对应关系是用解析式表达的,则它表示运算的框架. 如 $f(x)=3x^2+4x+5$,则 f 表示为:$3(\ )^2+4(\ )+5$.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地用解析式表示的函数,这时我们约定:函数的定

义域就是自变量所能取的能使解析表达式有意义的一切实数值. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为闭区间$[-1,1]$,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域就是开区间$(-1,1)$.

当自变量 x 取数值$x_0\in D$时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数$y=f(x)$在点 **x_0 处的函数值**,记为 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 遍取 D 的各个值时,对应的函数值全体的集合称为函数的**值域**,记为 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

对函数的定义我们再着重说明几点:

1) 在函数 $y=f(x)$中,x 处于矛盾的主要方面,起着主导作用;y 始终处于矛盾的次要方面,是从属地位. 在这样的条件下,即如果两个变量 x、y 之间有着确定的互相依赖、互相制约关系——函数关系,则在一定条件下起主导作用的变量 x 叫做自变量,而处于从属地位的 y,即随着自变量 x 的变化而变化、随着 x 的值的确定而确定的另一个变量y 叫自变量x 的函数,又叫因变量.

2) 在定义中有两个变量 x、y,而且变量 x 和y 不是任意的、毫不相干的、无联系的变量.而它们之间存在着一定的联系,y 是依赖于x 的,且受 x 制约的;反过来 x 在变化过程中也是受函数y 制约的,即 x 取定的每一个值,y 必须有惟一的一个值与之对应.即自变量所取的、能使解析表达式有意义的一切实数值,就是函数的定义域.

3) 对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的对应关系总有确定的实数与之对应,这里就是讲变量 x 与变量y 之间的相互联系和相互制约的关系——函数关系 f. 函数关系 f 一般有三种表示法:解析法、图像法和列表法.

总之,函数定义讲的是自变量 x 和因变量y(即函数 y),即所谓的函数 $y=f(x)$就是“一个变量的函数是另外一个变量,它的值随着前者的值而变化,也就是依赖于前者”[㊀].

由此可知,有时说函数的实质是一个特殊的变量,有时说函数的实质是两个变量之间的相互联系和相互制约的对应关系,二者是性质不同的两个概念.由简单表意法 $x\xrightarrow{f}y$,可以明显看出函数 y 与函数关系f 是不同的两个概念,是从函数的不同侧面来表达的.

例 2 求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在点 $x=2,x=x_0+1,x=x_0+\Delta x$ 处的函数值.

解 $f(2)=2^2-3\times 2+5=3$

$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3$

㊀ 《马克思数学手稿》,第 190 页.

$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)+5$$
$$=x_0^2+(2\Delta x-3)x_0+[(\Delta x)^2-3\Delta x+5]$$

例 3 求函数 $y=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$的定义域.

解 这个函数要求分母不为零,即 $x\neq-1,x\neq2$,所以定义域为

$$(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$$

例 4 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$的定义域.

解 开平方要求被开方数大于等于零,即要求$\dfrac{x-2}{x+1}\geqslant0$.又因为要求分母不为零,也就是要求 $x-2\geqslant0$,同时要求 $x+1>0$;或者要求 $x-2\leqslant0$,同时要求 $x+1<0$,即解下列不等式组:

$$\begin{cases}x-2\geqslant0\\x+1>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x-2\leqslant0\\x+1<0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant2\\x>-1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x\leqslant2\\x<-1\end{cases}$$

所以函数的定义域为$\{x\mid x\geqslant2$ 或 $x<-1\}$,也可以写成$(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$.

例 5 求函数 $y=\sqrt{x^2-1}+\arcsin x$ 的定义域.

解 $\sqrt{x^2-1}$要求$|x|\geqslant1$或写成$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,而 $\arcsin x$ 要求$|x|\leqslant1$或写成$[-1,1]$.两个函数和的定义域应是这两个函数定义域的公共部分,故函数的定义域为

$$\{x\mid x=\pm1\}$$

例 6 求函数 $y=\ln(1+x)$的定义域.

解 因为对数要求真数 $1+x>0$,所以定义域为$\{x\mid x>-1\}$,或写成$(-1,+\infty)$.

三、反函数

函数和反函数的矛盾就是自变量和因变量之间的矛盾.这是因为函数关系的实质就是从数量关系上来描述客观事物的运动、变化过程中变量之间的相互依赖、相互制约的关系.但是在研究问题的过程中,哪个量是自变量,哪个量是因变量(函数)是由具体问题来确定.

因为“一切矛盾着的东西互相联系着,不但在一定条件下共处于一个统一体中,而且在一定条件之下互相转化”㊀,自变量和函数也是如此.例如正弦函数

㊀ 《毛泽东选集》第一卷,第 304 页.

$y=\sin x$,其自变量是 x,即角的弧度数,因变量是 y,即该角 x 的正弦. 但在实际问题中还需要考虑另一种情况:某角的正弦值 y 是一个定值,求角. 这就需把角 x 的正弦 y 看成是自变量,而对应的角就看成是自变量的函数,记作 $x=\varphi(y)$. 这样,当 $x\in D$ 与 $y\in Y$ 在函数关系 f 和 φ 下都一一对应时,$y=f(x)(x\in D)$ 与 $x=\varphi(y)(y\in Y)$ 就构成互为反函数的两个函数,即 $x=\varphi(y)(y\in Y)$ 叫做 $y=f(x)(x\in D)$ 的反函数,反之亦然.

$y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant +\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 $x=\arcsin y(-1\leqslant y\leqslant 1)$ 互为反函数,由于习惯上我们常常选取 x 作为自变量,y 作为因变量,所以 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant +\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与 $y=\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是一对互为反函数.

一般地来说,若 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 互为反函数,则二者的关系是:

1) 自变量和因变量互易其位(实际上就是自变量和因变量互相转化).

2) 由于 1) 又造成了它们的定义域和值域互易其位(即定义域和值域互相转化).

3) 它们的图像关于第一、三象限的角平分线 $y=x$ 对称.

例 7 求函数 $y=4x-5$ 的反函数.

解 由 $y=4x-5$ 解出 x,得已知函数 $y=4x-5$ 的反函数

$$x=\frac{y+5}{4}$$

习惯上,$y=4x-5$ 的反函数表示为 $y=\dfrac{1}{4}(x+5)$.

举几个非常熟悉的互为反函数的例子,如函数 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 与 $y=\sqrt{x}(x\geqslant 0)$ 互为反函数;$y=\sin x(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2})$ 与 $y=\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 互为反函数.

四、基本初等函数

关于函数概念,约翰·伯努利已经将函数概念公式化了,而他的得意门生欧拉(Euler)在他的《引论》一书的开头,就把函数定义为“由一个变量与一些常量,通过任何方式形成的解析表达式”.他还概括了多项式、幂级数、对数表达式与三角表达式,定义了多元函数,引入了超越函数即三角函数、对数函数、指数函数等.

(一) 幂函数

幂函数 $y=x^\mu$(μ 是常数)的定义域由 μ 值来确定. 例如,当 $\mu=3$ 时,$y=x^3$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,当 $\mu=-\dfrac{1}{2}$ 时,$y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,当 μ

$=\frac{1}{2}$时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$. 但不论 μ 取何值，$y=x^{\mu}$ 在$(0,+\infty)$上总有定义，而当 $\mu=\cdots,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3,\cdots$时的 $y=x^{\mu}$ 是常见的幂函数，它们的图形如图 1-2 所示.

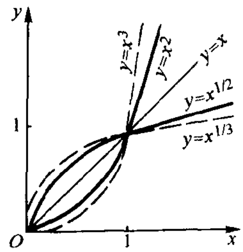

图 1-2

当 $\mu=-1$ 时，为双曲线 $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$.

(二) 三角函数

“三角学从综合几何学中发展出来，这对辩证法来说是一个很好的例证，说明辩证法怎样从事物的相互联系中理解事物，而不是孤立地理解事物.”也就是说，“如果不把三角形和圆这样联系起来，这些关系是决不能发现和利用的”.[⊖]而这种崭新的三角理论的发展，也使三角函数成为研究周期运动规律的有力工具，“它远远超过旧的三角理论而到处可以应用”.

因此，直线形的三角形发展成为完全不同于自身而且具有与自身完全不同质的圆形，这就是说三角形和圆形是相互联系的，而且是在质上的相互联系.

1. 正弦函数 $y=\sin x$　正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[-1,+1]$，是奇函数，并且它是以 2π 为周期的周期函数，在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的，如图 1-3 所示.

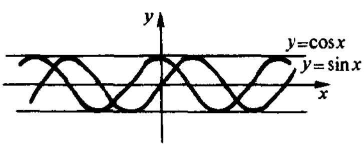

图 1-3

在数学史上，最早是圣彼得堡科学院的第一批成员在和差分式的基础上推导出了解析三角的一般恒等式，最后欧拉于 1748 年给出了三角函数十分系统的处理过程，并在他的《引论》中已经搞清了三角函数的周期性，并且首先引入了角的弧度数.

2. 余弦函数 $y=\cos x$　余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[-1,+1]$，余弦函数是一个偶函数，并且它也是以 2π 为周期的周期函数，在$[0,\pi]$上是单调减少的，如图 1-3 所示.

由约翰·伯努利到欧拉等一批人给出的三角恒等式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

⊖ 《自然辩证法》，第 243 页.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ 等}$$

在欧拉的《引论》中也都给出了十分系统的处理.

3. 正切函数 $y=\tan x$　正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $D(x)=\left\{x \,\middle|\, x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi, n=0,\pm1,\cdots\right\}$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，它是一个奇函数，并且它是以 π 为周期的周期函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调增加，如图 1-4a 所示. 而且，东方人比欧洲人更早有了正切函数表.

4. 余切函数 $y=\cot x$　余切函数 $y=\cot x$ 的定义域是 $D(x)=\{x\mid x\neq n\pi, n=0,\pm1,\cdots\}$，值域是 $(-\infty,+\infty)$，它是一个奇函数，并且它是以 π 为周期的周期函数，在 $(0,\pi)$ 上单调减少，如图 1-4b 所示.

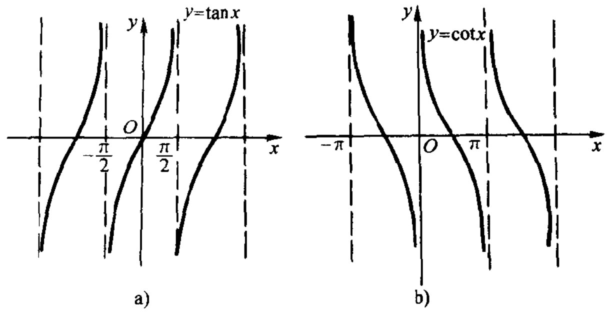

图 1-4

5. 正割函数 $y=\sec x$

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 的定义域为 $D(x)=\left\{x \,\middle|\, x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi, n=0,\pm1,\cdots\right\}$.

6. 余割函数 $y=\csc x$　余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 的定义域为 $D(x)=\{x\mid x\neq n\pi, n=0,\pm1,\cdots\}$.

欧拉整理的公式还有 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，$\tan x\cdot\cot x=1$ 等.

由此看出，三角学的进一步发展又使三角形必须脱离开圆，即“必须把它们从普遍的联系中抽象出来，孤立地考察它们”，尽管客观世界“是一幅由种种联系和相互作用无穷无尽地交织起来的画面”，但是如果我们只单纯地“把握了现象的总画面的一般性质，却不足以说明这幅画的各个细节；而我们要是不知道这些细节，就看不清总画面. 为了认识这些细节，我们不得不把它们从自然的或历史的联系中抽出来，从它们的特性、它们的特殊的原因和结果等等方面来逐个地加以研究.”㊀

因此，三角学基本上是使三角形脱离开圆而发展起来的. 从约翰·伯努利到欧拉，很多数学家逐渐完善三角函数理论，使之逐渐地成为数学中的一个独立分支.

虽然，最早是由我国古代数学家刘徽和祖冲之在利用割圆术计算圆周率 π 时，

㊀ 《反杜林论》，第 18 页.