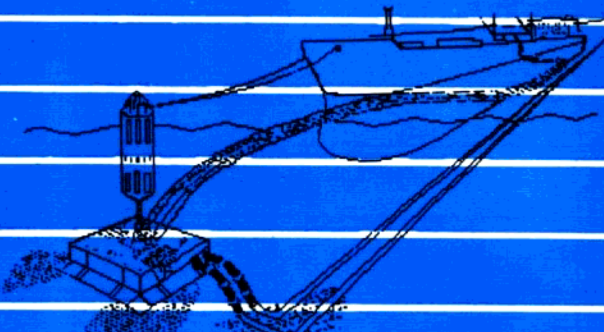
非线性谱分析理论及其在海洋工程中的应用

马汝建　著



石油大学出版社

序　言

海洋环境载荷包括有：风力、波浪力、海流力、冰力、地震力等，它们大多具有随机性，作用在结构物上是随时间而变化的，属于动载荷。在这些动载荷的作用下，海上结构物的随机振动的响应，关系到结构物的疲劳强度、保持定位以及海上作业环境的舒适等一系列安全可靠生产的重大问题。因此，海上结构物的随机动力分析问题，受到了海洋工程界的普遍关注，国内外一直在这方面开展研究工作。

海上结构物有固定式的，如海上固定采油平台，还有浮动式的，如生产储油轮，这两类结构物，都需要对其进行随机动力分析。当然，这两类结构物若它们不只一个，而是相邻的多个存在时，则其耦合作用是不容忽视的。因此，还必须要对它们进行耦合随机动力分析。这样，更给海上结构物的随机动力分析问题带来了复杂性，要求人们去深入进行研究。

当今对于随机振动的动力分析，无论是由随机激振力或是激振位移引起的，还是因表面不平度引起的振动，大多采用线性谱分析理论及方法。这样，将输入谱与其响应的传递函数模的平方相乘，即可很容易地求得随机振动系统的响应谱。但是，现代工程实践中，特别是海洋工程方面，有很多问题涉及到非线性随机振动。不仅在机械系统中存在有非线性势力，还有非线性阻尼力，甚至存在有与广义坐标及广义速度两个变量有关的混合型非线性力。对于这种非线性系统，由于系统响应的传递函数很难求得，因而常用的线性谱分析方法就受到了限制。面对这个难题，国内外都在探讨研究，也提出了一些解决问题的方法，如

法、统计线性化法及摄动法等。但是，这些方法中，后两种方法只能用于弱非线性系统，只有第一种方法可以用于强非线性系统，可是它限制条件严格，要求激励必须是白噪声，响应必

须是马尔柯夫过程，具有无后效性。这样，海洋石油工程中提出的非线性随机振动问题，尚不能找到圆满的解决问题的途径。

石油大学教师马汝建同志在从事海上结构物随机海浪作用下的动力响应问题研究过程中，萌生了用谱分析理论及方法分析非线性随机振动系统响应问题的想法，进而他自1988年至1991年在英国攻读博士学位期间，潜心进行了研究，回国后又继续深入研究，终于在1992年有所突破，初步建立了非线性谱分析理论，并在1993年第二期石油大学学报上，发表了非线性海浪载荷谱研究论文。这本书就是马汝建副教授在这些年来进行研究工作的基础上，围绕非线性谱分析理论及应用这个理论解决海洋工程中的非线性随机振动问题，而写成的专著。由于马汝建博士提出的非线性谱分析理论与方法适用性强，不仅适用于弱非线性，而且适用于强非线性，而且较统计线性化方法精度高5~10%，比FPK及摄动法的工作量减少50%左右，再加上全部实现了软件化，比现有的三种方法均使用方便，所以他这两年来在国内外期刊或学术会议上发表的有关论文，都得到了同行专家、学者的好评，认为他提出的非线性谱分析理论及方法体现了这一领域当今国内外的前沿水平，提供了解决非线性随机振动问题的一种有效工具，对今后这一方面研究的发展，有着重要的意义。我谨在这里，借机会向马汝建同志所取得的丰硕成果，向这本专著的问世，向青年教师、科技工作者所取得的成就，表示诚挚地祝贺！

一切新生事物都不会是完满无缺的，我想读者都一定会爱护新生事物，爱护年轻的新的生力军，对这本书提出宝贵的意见，使它更臻完善，扶植这个新生的幼芽，使它茁壮成长。

鉴于这本书的专业性强，数学理论较深，可供做有关专业的研究生的教学参考书，也可供有关科技人员自学之用。

方华灿

一九九四年一月

前　言

众所周知，谱分析法在线性随机振动中得到了广泛地应用。这是因为对于线性系统，系统的传递函数可以应用频率响应法很容易地得出，根据谱分析理论，系统的振动响应谱，等于输入谱与其传递函数模的平方之积，而系统的均方响应便可由响应谱在频率域上积分求得。

对于非线性系统，谱分析方法的应用受到了很大限制。难点在于系统的传递函数很难求得。这是由于即使系统的激励是线性的，经过系统的非线性传递后，其响应也不再是激励的线性函数。这就使问题的求解更加困难。但是，在现代工程实践中，有大量的问题涉及到非线性随机振动。例如振动系统中有非线性弹簧或非线性阻尼存在等。由于这些问题的复杂性，所以解决起来常常需要简化。现在国内外常用的方法有FPK方法，统计线性化方法，摄动法等等。但这些方法中，大部分适用于弱非线性问题，对于强非线性问题，尚无一般的解决方法。

为了寻求适用性更强的解决非线性随机振动的方法，国内外都在进行深入的探讨，但由于非线性随机振动的复杂性，目前还没有一般的解决方法，只是对个别问题有精确解，而大量的问题只能求得近似解，特别是对于强非线性问题，求解就更加困难。

非线性谱分析的思想产生于80年代末期，它的提出来自于科研工作中所遇到的实际问题。我主要从事海洋石油钻采设备的强度和工作理论方面的研究，所要解决的实际问题中大部分是海洋结构物在随机海浪作用下的动力响应问题，而且有许多是非线性随机振动的问题。对于线性问题，解决随机振动的有效工具是谱分析法，这就使我产生了这样的思想：对于非线性问题，

谱分析法是否也可以应用呢？经过反复探讨，发现该问题的难点在于非线性谱的制作，它不象线性谱分析法那样简单，而是需要通过复杂的数值计算才能得到。当时由于我们这里计算机的应用不很广泛，所以这样复杂的数值计算很难实现。及至在美国攻读博士学位期间，通过查阅文献，发现该问题的研究仍没有多大进展，所以回国后又继续研究这个课题，结果有所突破。在建立了非线性谱分析理论、实现了非线性谱制作的基础上，解决了一些海洋工程中常遇到的非线性随机振动问题。

与国内外同类研究相比，该方法具有下列四个特点：

1. 适用性强 该方法不但适用于弱非线性，而且适用于强非线性；不但适用于非线性激励问题、非线性刚度问题及非线性阻尼问题，而且适用于各种非线性共存的问题。本研究只要求输出过程是正态过程或准正态过程，对输入过程没有要求。

2. 精度高 与统计线性化方法相比，该方法的结果精度高。对于弱非线性问题，精度一般提高3~5%，而对于强非线性问题，精度可提高10%以上。

3. 计算工作量小 与FPK及摄动法相比，该方法的计算工作量小。一般只有上述两种方法工作量的50%左右。

4. 使用方便 由于非线性随机振动系统的复杂性，所以响应谱的求解必须用数值计算来实现。因此，该方法全部实现软件化，所以比现在常用的其它方法使用都方便。该软件对于不同的实际问题，设置用户参数，运行程序可直接得到系统的响应谱及均方响应。这样不但可以使有专业训练的技术人员应用方便，也可以使没有专业训练的人员使用。

非线性谱分析的实际应用得到了国内外同行专家的肯定和好评。投往Ocean Engineering 杂志的一篇论文，得到了评审人McCormick 教授（美国航海科学院海洋工程部主任）和Bhattacharyya 教授（美国航海科学院航海工程部主任）的高度评价，他们说该课题的研究富有时代感，并表示对此有很大的兴

趣。在山东、江苏、湖南三省振动学术交流会上宣读的一篇论文，得到了振动学会专家的肯定和好评。

由于该方法适用性强，精度高，计算工作量小，应用方便，从而为解决非线性随机振动问题提供了一种有效的工具，对非线性随机振动的发展有一定的意义。

由于非线性随机振动的复杂性，所以该理论的建立及应用还不成熟，不少方面还有待于进一步深入探讨。我热诚地希望能得到读者的宝贵意见，以便今后进一步修改、补充和完善。

本书完稿后，特请石油大学原副校长方华灿教授对本书进行了审查。方教授在百忙之中，对本书做了详尽地审查，并热情地为本书作序，在此表示衷心地谢意！

作　者

一九九三年十二月

目 录

第一章 谱分析理论基础

第一节 随机过程概论

自然界中事物的变化可分为两大类，第一类具有确定形式的变化过程，或者说具有必然的变化规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间 t 的确定函数来描述，这类过程称为确定性过程，例如自由落体运动，其位置随时间的变化就是一个确定过程。而另一类过程没有确定的变化规律，用数学语言来说，这类事物的变化过程不能用一个确定性函数来描述，如果对该事物的变化全过程进行一次观察，可得到一个时间 t 的函数，但是若对该事物的变化过程重复地独立地进行多次观察，每次所得到的结果是不相同的，从另一个角度来看，如固定某一观测时刻 t，事物在时刻 t 出现的状态是随机的，这类过程称为随机过程。

§1.1 随机过程的分类

根据随机过程的参数及其取值是否连续，随机过程可分为四大类，即离散参数离散型随机过程；连续参数离散型随机过程；离散参数连续型随机过程及连续参数连续型随机过程。

由于本书所用到的随机过程主要是第四类过程，所以我们在这里只讨论这种过程。这类过程的特点是参数集是连续的，且在 t 时刻，过程的取值 $X(t)$ 是连续型随机变量。例如，正弦波随机过程 $X(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$，如果取振幅 A 与角频率 ω 为常数，相

位角为 $(0,2\pi)$ 间均匀分布的随机变量，则 $X(t)$ 为连续参数连续型随机过程。

根据随机过程分布函数或概率密度的不同，随机过程也可以分成许多类型。其中与本书有关的几种类型是：

一、独立随机过程

设对于时间 t 的任意 n 个值 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，若随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是互相独立的，或者说随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数可以写成

$$F_n[x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)]=\prod_{k=1}^{n}F_k[x(t_k)] \quad n=1,2,\cdots \tag{1.1}$$

则称 $X(t)$ 为独立的随机过程。

这类过程的特点是，过程在任一时刻的状态和其它时刻的状态之间是互不影响的。

二、马尔柯夫过程

根据概率论理论，若用分布函数来描述过程的状态，就是对时间 t 的任意 n 个数值 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，$n\geq 3$，在条件 $X(t_i)=x_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$ 时，$X(t_n)$ 的分布函数恰好等于在条件 $X(t_{n-1})=x_{n-1}$ 时 $X(t_n)$ 的分布函数，即

$$\begin{aligned}&F_n(x_n,t_n|x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_1,t_{n-1},t_{n-2},\cdots,t_1)\\&=F_n(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}) \quad n=3,4,\cdots\end{aligned} \tag{1.2}$$

则称 $X(t)$ 为马尔柯夫过程或简称马氏过程。

这类随机过程的特点是：当过程在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件时，过程在时刻 $t\ (>t_0)$ 所处的状态与过程在 t_0 时刻以前的状态无关，即具有无后效性。

三、独立增量过程

设随机过程 $\{X(t), t>0\}$，当 $0 \le t_1 \le t_2$ 时，记做 $X(t_2)-X(t_1)=X(t_1,t_2)$，它是一个随机变量，称为 $X(t)$ 在时间间隔 $[t_1,t_2]$ 上的增量。若对于时间 t 的任意 n 个值 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，增量

$$X(t_1,t_2), X(t_3,t_4), \cdots, X(t_{n-1},t_n)$$

是互相独立的，则称 $X(t)$ 为独立增量过程，它是一种特殊的马氏过程。

这类随机过程的特点是：在任一时间间隔上过程状态的变化并不影响未来时间间隔上状态的变化，这种特性也叫做无后效性。

§1.2 随机过程的数字特征

用随机过程的分布函数族可以完善地描述随机过程的统计特性。但在实际应用中要确定随机过程的概率密度或分布函数族并加以分析往往比较困难，有时甚至不可能，因而象在研究随机变量的特性时引入随机变量的数字特征一样，在研究随机过程时也引入随机过程的数字特征，利用这些基本的数字特征既能描述随机过程的重要特征，又便于进行运算和实际测量。

一、数学期望

设随机过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$，对于某一时刻 $X(t_1)$ 为一个一维随机变量，其分布函数为 $F_{x_1}(x)$，概率密度为 $f_{x_1}(x)$，则定义

$$\mu_x(t_1) = E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{x_1}(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{1.3}$$

为随机过程 $X(t)$的数学期望或均值。

二、方差

设 $X(t)$ 的二阶中心矩存在，则定义

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t_1) &= E[x(t_1)-\mu_x(t_1)]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}[x(t_1)-\mu_x(t_1)]^2 f_{x_1}(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned} \tag{1.4}$$

为随机过程 $X(t)$的方差。

三、自相关函数

为了描述两个不同参数 t_1和t_2时刻随机过程状态之间的联系，要用二元概率密度。设 $X(t_1)$和 $X(t_2)$ 是随机过程 $X(t)$在参数为t_1和t_2 时的状态， $f_{x_1x_2}(x_1,x_2)$ 是相应的二维概率密度，如果其二阶混合原点矩存在，则定义

$$\begin{aligned}R_x(t_1,t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f_{x_1x_2}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2\end{aligned} \tag{1.5}$$

为随机过程 $X(t)$ 的自相关函数。

§1.3　平稳随机过程

所谓平稳随机过程，粗略地说，指的是它的统计特性不随时

间的推移而变化。其定义有严平稳随机过程和宽平稳随机过程(广义平稳随机过程)两种。

一、严平稳随机过程

设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$，若对于任意 n 和任意选定的 $t_i < t_{i+1}, i = 1,2,\cdots,n$，以及任意时间间隔 τ，其分布函数满足

$$F_x(x_i, t_i, i = 1,2,\cdots,n) = F_x(x_i, t_i + \tau, i = 1,2,\cdots,n) \tag{1.6}$$

则称该过程为严平稳随机过程。

该定义说明，当取样点在时间轴上作任意平移时，随机过程的所有有限维分布函数是不变的。一般来说，当产生随机现象的一切主要条件可视为不随时间的推移而改变时，则这类过程可以看作是平稳的。

由定义可知，严平稳随机过程的所有一维分布函数均与 t 无关，即

$$F_x(x, t) = F_x(x, t + \tau) \tag{1.7}$$

其二维分布函数是时间差 $(t_2 - t_1)$ 的函数，而不再是 t_1 和 t_2 本身的函数，即

$$F_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = F_x(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1) \tag{1.8}$$

二、宽平稳随机过程

设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$，如果其均值和方差都存在，且均值为常数，相关函数仅是 $\tau = t_2 - t_1$ 的函数，则称它为宽平稳随机过程，或广义平稳随机过程。

§1.4 随机过程的各态历经性

研究随机过程的统计特性一般说来需要知道过程的 n 维概

率密度或 n 维分布函数，或者说要知道一族样本函数。这一点在实际问题中往往不易办到，因为这时要求对一个过程进行大量重复的实验观察，以便得到很多样本函数。

现在要问，能否从一个时间范围内观察到的一个样本函数作为提取这个过程数字特征的充分依据呢？这就要看该过程是否具有各态历经性。所谓各态历经性，是指可以从任意一个随机过程的样本函数中得到它的各种统计特征。具有这一特性的随机过程称为具有各态历经性的随机过程。因此，对于具有各态历经性的随机过程，只要有一个样本函数就可以表示出所有的数字特征。

一、随机过程均值的各态历经性

设 $X(t)$ 是均方连续平稳的随机过程，如果它沿整个时间轴上的平均值，即时间平均值

$$< X(t) >= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

存在，而且 $< X(t) >= E[X(t)] = \mu_x$ 依概率1相等，则称该过程的均值具有各态历经性。

二、随机过程自相关函数的各态历经性

如果上述随机过程 $X(t)$，对于固定的 τ，$X(t+\tau)X(t)$ 也是连续平稳的随机过程，若 $X(t)$ 的时间相关函数，即沿整个时间轴上的平均值

$$< X(t+\tau)X(t) >= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)X(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.10}$$

存在，并且 $< X(t+\tau)X(t) >= E[X(t+\tau)X(t)] = R_x(\tau)$ 依概率1相等，则称该过程的自相关函数具有各态历经性。

三、随机过程的各态历经性

如果上述随机过程 $X(t)$，其均值和自相关函数均具有各态历经性，则称该过程具有各态历经性。

§1.5 高斯随机过程

在许多实际问题中遇到的是大量随机变量和的问题。根据中心极限定理可知，在满足一定条件下大量随机变量和的极限是正态分布(或高斯分布)的。一个随机过程可以用 n 元随机变量的分布来描述，n 越大描述越精确。如果对一个随机过程任意选取 n 个时刻（n 也是任意选取的），得到 n 个相应的随机变量，此 n 元随机变量的联合分布是正态分布，则称过程为正态过程或高斯过程。因此，在研究高斯过程时，首先应该研究多元正态分布的随机变量。

一、多元正态分布

(一) 一元正态分布

设随机变量 X 是正态分布的，其均值为 μ，方差为 σ^2，则它的概率密度可表示为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \tag{1.11}$$

(二) 二元正态分布

设二元正态分布随机变量 X、Y，其均值为

$$E\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \mu \tag{1.12}$$

协方差矩阵为

$$B=\begin{Bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{Bmatrix} \tag{1.13}$$

其中 ρ 代表 X 和 Y 的相关系数，则它的概率密度可表示为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times\exp\left\{-\frac{(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \tag{1.14}$$

（三）n 元正态分布

设 n 维随机向量 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}^r$，其均值为 $\mu=\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}^r$，协方差矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$$

其中

$$b_{ij}=E[(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)]$$

如果 n 维随机向量 X 是正态分布的随机向量，其均值为实值向量 μ，协方差矩阵 B 是正定的，则其概率密度可表示为

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}|B|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\tau}B^{-1}(x-\mu)\right\} \tag{1.15}$$