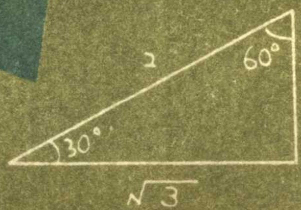
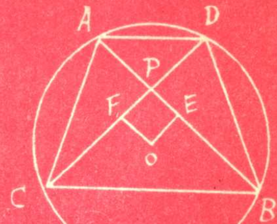
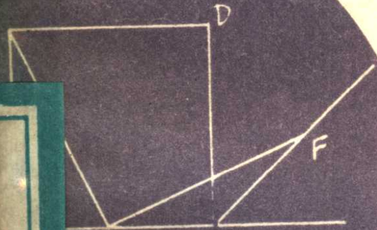
数学竞赛辅导讲座

（初中二年级用）







初中数学课外读物

湖北少年儿童出版社

数学竞赛辅导讲座

（初中二年级用）

主编　胡克俭
编者　赵明富　朱运才
　　　向希墡　林友智

湖北少年儿童出版社

数学竞赛辅导讲座

（初中二年级用）

主编　胡克俭

*

湖北少年儿童出版社出版　湖北省新华书店发行

武汉市江汉印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　8.75印张　156,000字

1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷

印数：1－200,500

统一书号：7305·125　　定价：0.85元

内 容 提 要

《数学竞赛辅导讲座》是初中学生开展数学竞赛活动的指南。

书中将整个初中数学竞赛范围内的知识作了系统的归纳，并根据各年级学生的实际情况，构筑起一个多层次的知识体系，着重于数学思维能力的培养和解题技巧的训练，强调用高一级的数学知识解决初中数学问题。书中编选的例题和习题，大都是国内外数学竞赛的试题，便于读者了解初中数学竞赛的基本要求。

序

要使学生成为知识的主人而不是成为知识的容器，这种观点已越来越为广大教育工作者所接受。相应地，在中学数学教学领域内，开拓第二课堂的工作也已普遍引起重视。这里，组织数学竞赛活动成为推动这项工作的重要一环。而与竞赛活动相表里的有关辅导讲座理所当然地成为第二课堂内容的重要组成部分。在这种形势下，湖北少年儿童出版社主动组织、编写这套初中数学竞赛辅导讲座丛书，我以为是及时的，有积极意义的，值得向青少年读者推荐。

大家都知道，在数学教育上培养思维能力的工作宜于从早抓起，从少年时代抓起，这套丛书面向初中读者，这也正反映了编辑匠心独具，是这方面下力量的有心人，而参加编写工作的同志，有多年从事中学教研工作的数学工作者，也有多年从事中学数学教学积累有相当丰富经验的中学教师。他们的看法是：编写初中数学课外读物，要从初中学生的实际和初中数学教学的实际出发，要强调立足于教材，略高于教材。在开拓视野，发展能力这两点上，更应侧重于后者。因此从具体内容来看，主要在于从各年级的基础知识出发，突出了综合性和灵活性，我以为从这个角

度来确定读物的深度和广度，对于提高初中数学教学质量，也是有积极意义的。

近年来，我由于工作关系，对于中学数学教学问题接触得比较少，但由于中学生科学文化水平的高低极大地影响着“四化”建设，作为科技工作者，对此是不能不关心的。因此对本丛书的出版，我也由衷地感到高兴。愿意借此机会写几句话作为代序。

齐民友

1984.8.1

目　录

第一讲 根 式

有关根式的问题，常常要求去掉根号和简化计算过程。熟悉根式的性质，掌握一定的技巧，可以提高我们解决这类问题的能力。

一、$(\sqrt{a})^2$ 和 $\sqrt{a^2}$

1. $(\sqrt{a})^2$

$\sqrt{a}$ 表示平方等于a的非负数，也就是a的算术平方根。因此，对于任何非负数a来说，下列恒等式成立：

$$(\sqrt{a})^2 = a \tag{①}$$

为了用去掉根号的方法来研究根式，经常把公式①与下面的定理结合起来。

定理一 如果$A \geqslant 0$，$B \geqslant 0$，那么

$$A = B \Longleftrightarrow A^2 = B^2,\quad A > B \Longleftrightarrow A^2 > B^2.$$

这里的符号“$\Longleftrightarrow$”表示两端的式子是“等价”的，也就是“从左端可以推出右端，并且从右端可以推出左端”。

例1 已知a、b、c、d是有理数，$\sqrt{c}$、$\sqrt{d}$ 是无理数，$a+\sqrt{c}=b+\sqrt{d}$。求证：$a=b$，$c=d$。

分析：为了利用条件式，我们先把它化简，也就是设法减少条件式中的根号。

证明：把条件式移项，得

$$a-b+\sqrt{c}=\sqrt{d}。$$

两边平方，得

$$a^2+b^2+c-2ab+2a\sqrt{c}-2b\sqrt{c}=d,$$

即 $$(2a-2b)\sqrt{c}=d+2ab-a^2-b^2-c。$$

右边是有理数，因此左边也是有理数，所以

$$2a-2b=0，即a=b。$$

由此得 $d+2ab-a^2-b^2-c=0$。

于是 $d=c$。

例2　已知a、b都是非负数，并且$\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}=ab$，求证：$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$。

分析：根据定理一，只须证明$(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})^2=1$。为了利用条件式来证明这个式子，还须把条件式化简，也就是设法去掉条件式中的根号。为此，我们仍然采用“平方去根号”的方法。

证明：由条件式，得

$$(1-a^2)(1-b^2)=a^2b^2,$$

即 $$1-(a^2+b^2)+a^2b^2=a^2b^2,$$

$$\therefore\ a^2+b^2=1。$$

$$\because(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})^2$$
$$=a^2(1-b^2)+b^2(1-a^2)+2ab\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2}$$
$$=a^2+b^2-2a^2b^2+2ab\cdot\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$
$$=1-2a^2b^2+2ab\cdot ab$$
$$=1$$

$$\therefore\ a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1。$$

例3　设a、b是两个非负数，求证：

$$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

分析：不等号两边都是根式，我们可以根据定理一采用“平方后比较大小”的方法进行证明。

证明：　$\because\ (\sqrt{a+b})^2 = a+b$,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$
$$= a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}.$$

又因为$2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$，所以

$$(\sqrt{a+b})^2 \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.$$

由此得　$\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

例4　设a、b是两个非负数，求证：$2\sqrt{ab} \leqslant a+b$.

证明：　$\because\ (2\sqrt{ab})^2 = 4ab$,

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = 4ab+(a^2-2ab+b^2)$$
$$= 4ab+(a-b)^2,$$

$\therefore\ (2\sqrt{ab})^2 \leqslant (a+b)^2$,

$\therefore\ 2\sqrt{ab} \leqslant a+b$.

说明：这是一个重要的不等式，有许多问题都要用到它。

在前面的例子中，我们用A来研究$\sqrt{A}$；在有的问题中，须要我们采用“反过来”的办法，也就是用$\sqrt{A}$来表示A或者用$\sqrt{A}$来研究A。

例5　化简：

$$\frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}} \qquad (x>2)$$

解：原式$=\dfrac{(x+1)(x-2)+(x-1)\sqrt{(x+2)(x-2)}}{(x-1)(x+2)+(x+1)\sqrt{(x+2)(x-2)}}$

$$=\frac{(x+1)(\sqrt{x-2})^2+(x-1)\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2})^2+(x+1)\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}\,[(x+1)\sqrt{x-2}+(x-1)\sqrt{x+2}]}{\sqrt{x+2}\,[(x-1)\sqrt{x+2}+(x+1)\sqrt{x-2}]}$$

$$=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}。$$

例6　设a、b、c、d都是小于1的正数，求证四个乘积$4a(1-b)$、$4b(1-c)$、$4c(1-d)$、$4d(1-a)$不可能都大于1。

分析：关于“不可能怎样”的证明，通常是采用“反证法”，也就是“由结论的反面不成立来证明结论成立”的证明方法。因此，我们分三步进行：(1)假定结论的反面成立，(2)由假定推出矛盾，(3)肯定原结论成立。为了由假定推出矛盾，我们把“$4a(1-b)>1$”化为“$2\sqrt{a(1-b)}>1$”，“$4b(1-c)>1$”化为“$2\sqrt{b(1-c)}>1$”等等。

证明：设所求证的结论的反面成立，即$4a(1-b)>1$、$4b(1-c)>1$、$4c(1-d)>1$、$4d(1-a)>1$，则$2\sqrt{a(1-b)}>1$、$2\sqrt{b(1-c)}>1$、$2\sqrt{c(1-d)}>1$、$2\sqrt{d(1-a)}>1$。

由此得
$$2\sqrt{a(1-b)}+2\sqrt{b(1-c)}+2\sqrt{c(1-d)}+2\sqrt{d(1-a)}>4. \qquad ①$$

由例4，得　$2\sqrt{a(1-b)}\leqslant a+(1-b)$，

$2\sqrt{b(1-c)}\leqslant b+(1-c)$，

$$2\sqrt{c(1-d)} \leqslant c+(1-d),$$
$$2\sqrt{d(1-a)} \leqslant d+(1-a),$$
$$\therefore\ 2\sqrt{a(1-b)}+2\sqrt{b(1-c)}+2\sqrt{c(1-d)}$$
$$+2\sqrt{d(1-a)} \leqslant 4. \qquad ②$$

②与①相矛盾，所以“四个乘积都大于1”是不成立的，因而四个乘积$4a(1-b)$、$4b(1-c)$、$4c(1-d)$、$4d(1-a)$不可能都大于1。

2. $\sqrt{a^2}$

当a为非负数时，由算术平方根的定义，显然有$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$；当a为负数时，$a^2>0$，$a^2$的算术平方根是a的相反数，即$\sqrt{a^2}=-a\ (a<0)$。因此，对于任何实数a，我们有恒等式

$$\sqrt{a^2}=|a|. \qquad ②$$

公式②给出了化简二次根式的另一个有效的方法——“配方去根号”的方法。

例7 化简根式$\sqrt{(x-\sqrt{x^2})^2}$。$(x<0)$

解：$\sqrt{[x-\sqrt{x^2}]^2}$

$=\sqrt{[x-(-x)]^2}$

$=\sqrt{(2x)^2}$

$=|2x|$

$=-2x$。

注意：$\sqrt{x^2}$的值不一定是x，当$x<0$时$\sqrt{x^2}$的值是$-x$。

例8 化简$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$。

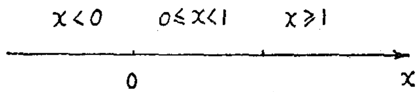
分析：为了去掉根号，我们把第二个根式的被开方式写

成完全平方的形式。

解：原式$=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}$

$=|x|+|x-1|$。

为了去掉绝对值符号，我们画出数轴OX，并在数轴上标出0和1（它们分别是使绝对值符号内的式子为零的两个数），这两个数把数轴分成三段（如图）：



（1）当$x<0$时，原式$=-x-(x-1)=-2x+1$；

（2）当$0\leqslant x<1$时，原式$=x-(x-1)=1$；

（3）当$x\geqslant 1$时，原式$=x+x-1=2x-1$。

说明：在本例中，为了去掉绝对值符号使式子化简，我们把数轴分成几段来讨论，这种处理含绝对值符号的式子的方法，称为"分段解法"。

例9　化简：

（1）$\sqrt{12+2\sqrt{35}}$　　　　（2）$\sqrt{6-3\sqrt{3}}$。

分析：为了化简复合二次根式$\sqrt{a+2\sqrt{b}}$，我们应该设法找到两个正数x和y（$x>y$），使$x+y=a$，$xy=b$，也就是作如下的变形

$$a\pm 2\sqrt{b}=x+y\pm 2\sqrt{xy}。$$

于是

$$\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}。$$

解：（1）原式$=\sqrt{7+5+2\sqrt{7\times 5}}$

$=\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}$

$$=\sqrt{7}+\sqrt{5}。$$

（2）原式$=\sqrt{6-\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{12-2\sqrt{27}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{9+3-2\sqrt{9\times3}}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}。$$

注意：为了便于配方，我们应先把复合根式化成$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$的形式。当$\sqrt{b}$的系数不是2时，要先把它配成2。

例10　化简$\sqrt{10+8\sqrt{3+\sqrt{8}}}$。

解：　$\because\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+1+2\sqrt{2\times1}}$
$=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$。

$\therefore$原式$=\sqrt{10+8(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{18+2\sqrt{32}}$

$$=\sqrt{16+2+2\sqrt{16\times2}}=\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}$$

$$=4+\sqrt{2}。$$

例11　化简$\sqrt{2a-1-\sqrt{4a^2-4a}}$。

解：原式$=\sqrt{a+(a-1)-2\sqrt{a(a-1)}}$

$$=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^2}$$

$$=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}。$$

二、$a+\sqrt{b}$和$a-\sqrt{b}$

在含字母x、y的多项式中，如果交换x和y的位置后多

项式的值不变，那么称这个多项式为关于x、y的对称多项式（简称为对称式）。

$x+y$和xy就是对称式，我们把这两个对称式称为基本对称式。

对称式有下面的一个重要性质。

定理二 x、y的任一对称多项式总可以用基本对称式表示。

例如，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$，

$$x^3+y^3=(x+y)[(x+y)^2-3xy],$$

$$3x^2-5xy+3y^2=3(x+y)^2-11xy\text{等等。}$$

如果我们设

$$x=a+\sqrt{b}, \quad y=a-\sqrt{b},$$

那么$x+y$和xy都是简单的数（或式），因此，利用定理二来解决对称多项式的求值（或化简）问题是很方便的。

例12　设$x=4+\sqrt{15}$，$y=4-\sqrt{15}$，求$x^3+x^2y+xy^2+y^3$的值。

解：$\because x+y=(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=8$，

$xy=(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=16-15=1$，

$$\therefore\ x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x+y)(x^2+y^2)$$
$$=(x+y)[(x+y)^2-2xy]$$
$$=8\times[8^2-2\times1]=496.$$

例13　设$x=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$，$y=\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$，

求$x^4+x^2y^2+y^4$的值。

解：$\because x=\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$y=\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore x+y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=3,$$

$$xy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{9-5}{4}=1,$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式}&=(x^2+y^2)^2-x^2y^2\\&=[(x+y)^2-2xy]^2-(xy)^2\\&=(9-2)^2-1\\&=48.\end{aligned}$$

例14　设$x=\sqrt{5+\sqrt{5}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{5}}$，求x^6+y^6的值。

分析：x和y都是复合根式，但是x^2和y^2是一对共轭根式，x^6+y^6可以看成是$(x^2)^3+(y^2)^3$，利用这两点也可以简化计算。

解：$\because$　$x^2+y^2=(\sqrt{5+\sqrt{5}})^2+(\sqrt{5-\sqrt{5}})^2$

$$=10,$$

$$x^2y^2=(\sqrt{5+\sqrt{5}})^2(\sqrt{5-\sqrt{5}})^2=20,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x^6+y^6&=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)\\&=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]\\&=10\times[10^2-3\times20]\\&=400.\end{aligned}$$

例15　化简：

$$M=\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}}+\sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}}.$$

分析：给出的式子比较复杂。我们注意到两项的被开方式$8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}$和$8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}$可以看作 $a+\sqrt{b}$和$a-\sqrt{b}$的形式，它们的和与积都比较简单，因此，我们先化简M^2。

解：$\because\quad (A+B)^2=A^2+B^2+2AB,$

$$\begin{aligned}\therefore\quad M^2&=(8+\sqrt{40+8\sqrt{5}})+(8-\sqrt{40+8\sqrt{5}})\\&\quad+2\sqrt{(8+\sqrt{40+8\sqrt{5}})(8-\sqrt{40+8\sqrt{5}})}\\&=16+2\sqrt{64-(40+8\sqrt{5})}\\&=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}\\&=16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}}\\&=16+4\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}\\&=16+4(\sqrt{5}-1)\\&=12+4\sqrt{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore M&=\sqrt{12+4\sqrt{5}}=\sqrt{12+2\sqrt{20}}=\sqrt{10+2+2\sqrt{10\times 2}}\\&=\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

三、字母替换法

在根式的计算和化简问题中，字母替换法常常可以起到化难为易的作用。

例16 化简 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

分析：式中的两个根式都比较复杂，我们注意到它们的