普通高等学校公共基础课

助学·助教·助考 丛书

线性代数学习指导

王来生 主编

XIANXINGDAISHU XUEXIZHIDAO

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

普通高等学校公共基础课

助学·助教·助考丛书

线性代数学习指导

王来生　主编

中国农业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/王来生主编. 一北京:中国农业大学出版社,2005.10
ISBN 7-81066-902-8

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 064848 号

书　　名 线性代数学习指导
作　　者 王来生 主编

策划编辑	刘 军	**责任编辑**	洪重光
封面设计	郑 川	**责任校对**	陈 莹 王晓凤
出版发行	中国农业大学出版社		
社　　址	北京市海淀区圆明园西路 2 号	**邮政编码**	100094
电　　话	发行部 010-62731190,2620		读者服务部 010-62732336
	编辑部 010-62732617,2618		出 版 部 010-62733440
网　　址	http://www.cau.edu.cn/caup	**E-mail**	caup@public.bta.net.cn
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		
版　　次	2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月第 1 次印刷		
规　　格	787×980　16 开本　14.25 印张　259 千字		
印　　数	1～3 500		
定　　价	17.00 元		

图书如有质量问题本社发行部负责调换

内容简介

本书为高等学校工科专业线性代数课程同步学习参考教材，通过大量的典型例题帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力，许多典型例题都选自考研真题。

全书分5章，内容分别为行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型。每一章由内容要点、基本要求、典型例题、本章小结、自测题和自测题答案与提示组成。在内容要点部分，给出了基本概念、定义、重要定理与常用公式，很方便学生学习。

本书旨在帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，培养学生综合分析和解决问题的能力。

本书兼顾了各个专业的需求，可供理、工、农、经等非数学专业的大学生及从事线性代数教学的教师使用，也可作为考研数学的复习参考书。

前　言

线性代数是高等学校本科生最重要的基础课程之一，为了更好地指导学生学好这门课程，加深对所学内容的理解和掌握，我们根据工科线性代数教学大纲并结合同济大学应用数学系主编的《线性代数(第4版)》组织编写了这本《线性代数学习指导》。

读者可将本书与所用线性代数教材配合使用。本书的主要特点是：依据教学大纲和研究生考试大纲的基本要求，精选出具有启发性、典型性和针对性的题目，许多典型例题都选自历届考研真题，通过对这些题目的分析解答，帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力。

全书分五章，每一章由内容要点、基本要求、典型例题组成。每一章后附有自测题和自测题答案与提示。在内容要点部分，给出了基本概念、定义、重要定理与常用公式，很方便学生的学习。所选的典型例题由易到难，配合课堂教学同步训练。为了与课堂教学有所区别，相当一部分典型例题综合性较强并具有一定的深度。对于典型例题中难度较大的题，先给出解题思路分析，然后给出正式解答，有的题最后还加以评注。目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，开拓思维模式，培养学生综合分析和解决问题的能力。每章结束让学生做一套本章的自测题，使学生及时了解本章的学习情况。书后附两套综合模拟试题，对应全书内容。本书对于学生的平时学习及考研复习都是很有帮助的。本书兼顾了各个专业的需求，可供理、工、农、经等非数学专业的大学生及从事线性代数教学的教师使用，也可作为考研数学的复习参考书。

本书的编写人员是多年从事线性代数教学的教师，其中第一章由王来生教授编写，第二章由经玲副教授编写，第三章由甄苓副教授编写，第四章由周志坚教授编写，第五章由王玉华副教授编写，全书由王来生教授统稿。

由于编写人员水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者指正。

编　者

2005年5月

目　　录

第一章　行列式

一、内容要点

1. 排列与逆序

(1)由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列，通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列。

(2)一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个逆序。一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数。用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为偶排列，否则称为奇排列。

2. n 阶行列式的概念

设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^{\tau}$，得到形如 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数，由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的项共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的第 i 行、第 j 列元素。

3. 行列式的性质及计算

(1)n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

其中 τ 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

(2)行列式与它的转置行列式相等。

(3)互换行列式的两行(列),行列式变号。

特别地,如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零。

(4)行列式的某一行(列)中的所有的元素都乘以同一数K,等于用数K 乘此行列式。

特别地,行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面。

(5)行列式如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零。

(6)若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(7)把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变。

(8)行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

(9)行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积

之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad i\neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad i\neq j$$

注　在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}；记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij}叫做元素a_{ij}的代数余子式。

4. 克莱姆(Cramer)法则及其推论

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

右端的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$不全为零时，称线性方程组(1)为非齐次线性方程组，当$b_1,b_2,\cdots,b_n$全为零时，称线性方程组(1)为齐次线性方程组。

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$一定是它的解，这个解称为齐次线性方程组(2)的零解；如果一组不全为零的数是(2)的解，则称它为齐次线性方程组(2)的非零解。

(1)*克莱姆法则*　如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

那么，方程组(1)有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数

项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2)克莱姆法则的有关推论

①如果线性方程组(1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

②如果线性方程组(2)的系数行列式$D\neq 0$，则齐次线性方程组(2)没有非零解。

③如果线性方程组(2)有非零解，则系数行列式必为零。

二、基本要求

(1)掌握行列式的概念，理解余子式和代数余子式的概念。

(2)熟练掌握行列式的性质，能熟练运用行列式性质简化行列式的计算。

(3)熟悉克莱姆法则，并会用它求解线性方程组。

三、典型例题

例 1 排列 25134 是偶排列还是奇排列。

解 在5级排列25134中，有逆序21，51，53，54，因此排列25134的逆序数为4，即$\tau(25134)=4$。所以排列25134是偶排列。

例 2 已知$a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$是4阶行列式的一项，求j，并确定该项所带符号。

解 因为$a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$是4阶行列式的一项，那么根据行列式的定义，它应是不同行不同列元素的乘积，因此必有$j=3$。

由于$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$排列的逆序数$\tau(4312)=3+2+0=5$是奇数，所以该项所带符号为负号。

例 3 根据行列式定义，计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中x^4与x^3的系数。

解 根据行列式定义，只有主对角线上的元素相乘才出现x^4，而且这一项带正号，即$2x^4$，故$f(x)$的x^4的系数为2。

同理，含 x^3 的项也只有一项，即

$$x\cdot 1\cdot x\cdot x=x^3$$

而且其列标所构成的排列为2 1 3 4。但是$\tau(2\ 1\ 3\ 4)=1$，故$f(x)$的含 x^3 的项为$-x^3$，它的系数为-1。

例4　用定义计算

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

解　因为行列式的一般项为$(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，为了取出值不为零的元素，第3，4，5行可取的元素，其列坐标分别为$j_3=4,5$；$j_4=4,5$；$j_5=4,5$。虽然有$j_1=1,2,3,4,5$；$j_2=1,2,3,4,5$；但这组数值不能构成一个值不为零的5级排列，或反过来讲，为了能构成行列式中的一项，对于$j_3=4,5$；$j_4=4,5$；$j_5=4,5$ 当其中两行（如第3，4行）取不为零的元素时（如取a_{34}，a_{45}），则剩下的一行只能取零元素（$j_5=1$或2或3，即取a_{51}或a_{52}或a_{53}），因此本行列式没有不为零的项，故有$D=0$。

例5　计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解法一　按第1列展开，得

$$D=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

注　利用降阶法（按行（列）展开法）求解行列式，是进行行列式计算时常用

的一种基本方法。

解法二 直接利用定义，由行列式的定义知此行列式除项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 和 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$ 外其余乘积项都是零，故

$$D_n=(-1)^{\tau(12\cdots n)}x\cdot x\cdots x+(-1)^{\tau(23\cdots n1)}y\cdot y\cdots y=x^n+(-1)^{n-1}y^n$$

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

解法一

$$D\xlongequal{\text{按第 1 行展开}}a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+b_1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

解法二

$$D\xlongequal{\text{按第 1,4 行展开}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{(1+4)+(1+4)}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=$$

$$(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

解法三

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_4}-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

例 7 计算 $2n$ 阶行列式：

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a &&&&&& b \\ & a &&&& b & \\ && \ddots && \unicode{x22F0} && \\ &&& a \quad b &&& \\ &&& c \quad d &&& \\ && \unicode{x22F0} && \ddots && \\ & c &&&& d & \\ c &&&&&& d \end{vmatrix}$$

解　对D_{2n}按第1行展开，得

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a &&&&& b & 0 \\ & \ddots &&& \unicode{x22F0} && \\ && a & b &&& \\ && c & d &&& \\ & \unicode{x22F0} &&& \ddots && \\ c &&&&& d & 0 \\ 0 &&&&& 0 & d \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} 0 & a &&&&& b \\ && \ddots &&& \unicode{x22F0} & \\ &&& a & b && \\ &&& c & d && \\ && \unicode{x22F0} &&& \ddots & \\ 0 & c &&&&& d \\ c & 0 &&&&& 0 \end{vmatrix}=$$

$$ad\cdot D_{2(n-1)}-bc\cdot D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

据此递推下去，可得

$$\begin{aligned} D_{2n}=&(ad-bc)\cdot D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2\cdot D_{2(n-2)}=\cdots= \\ &(ad-bc)^{n-1}\cdot D_2=(ad-bc)^{n-1}\cdot(ad-bc)= \\ &(ad-bc)^n \end{aligned}$$

所以
$$D_{2n}=(ad-bc)^n$$

注　本题和例8是典型的“两条线”行列式，这种行列式一般采取直接展开法计算，降阶后的行列式或为三角行列式，或得到一个递推公式。

例8　计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a &&& b \\ & a && \\ && \ddots & \\ b &&& a \end{vmatrix}$

解法一

$$D_n \xlongequal{\text{按第1列展开}} a\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} + b(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & & & & b \\ a & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$a^n + b\cdot(-1)^{(n+1)}\cdot b\cdot(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} = a^n - a^{n-2}b^2$$

解法二 当$a=0$时,$D=0=a^n-a^{n-2}b^2$

当$a\neq 0$时,第1行乘以$\left(-\dfrac{b}{a}\right)$加到第$n$行上,得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & a & \\ 0 & & & & a-\dfrac{b^2}{a} \end{vmatrix} = a^{n-1}\left(a-\frac{b^2}{a}\right) = a^n - a^{n-2}b^2$$

总之有
$$D_n = a^n - a^{n-2}b^2$$

注 此种解法要考虑$a=0$的情况,否则不能用$\left(-\dfrac{b}{a}\right)$去乘某一行。

例9 计算$D_5=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

解法一 从第1行开始将第i行的一个倍数加到第$i+1$行,化成三角形行列式得

$$D_5=\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&0&0\\0&0&\frac{4}{3}&1&0\\0&0&0&\frac{5}{4}&1\\0&0&0&0&\frac{6}{5}\end{vmatrix}=6$$

解法二

$$D_5\xlongequal{\text{按第1行展开}}2\begin{vmatrix}2&1&&\\1&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&&\\&2&1&\\&1&2&1\\&&1&2\end{vmatrix}=2D_4-D_3$$

由此可得递推公式 $D_5-D_4=D_4-D_3$，递推该关系式就有：

$$D_5-D_4=D_4-D_3=D_3-D_2=D_2-D_1=3-2=1,D_5=D_4+1$$

再一次递推得　$D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3=D_1+4=6$

注　这是一个“三对角”行列式，通常“三对角”行列式首先求得一个一般的递推公式

$$D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$$

然后用以下两种方法之一求出 D_n 的表达式：

1）先计算 D_1,D_2,D_3 等，找出规律，然后再用数学归纳法进行证明。

2）用间接递推法，即借助于行列式中元素的对称性，交换行列式构造出关于 D_n 和 D_{n-1} 的方程组，从而消去 D_{n-1} 就可以解得 D_n。

例 10　计算行列式：$\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&a_1+x\end{vmatrix}$

解法一　用 D 表示所给的行列式。

从最后 1 列开始，每列都乘 x 往前一列加，则第 1 列除最后 1 个元素为

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

外，其余元素全为零。于是按这一列展开，得

$$D=(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=$$

$$(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\cdot(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}=$$

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

解法二　按第1列展开

$$D_n=x\cdot D_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\cdot\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\x&-1&\cdots&0&0\\0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&-1\end{vmatrix}=$$

$$x\cdot D_{n-1}+a_n\cdot(-1)^{2n}=x\cdot D_{n-1}+a_n$$

故
$$D_n=a_n+xD_{n-1}$$

这就是本题行列式的一个递推公式，递推有$D_{n-1}=a_{n-1}+xD_{n-2}$，…，故有

$$D_n=a_n+xD_{n-1}=a_n+x(a_{n-1}+xD_{n-2})=a_n+a_{n-1}x+x^2D_{n-2}=$$

$$a_n+a_{n-1}x+x^2(a_{n-2}+xD_{n-3})=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+x^3D_{n-3}=\cdots=$$

$$a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_3x^{n-3}+x^{n-2}D_2=$$

$$a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_3x^{n-3}+x^{n-2}\begin{vmatrix}x&-1\\a_2&a_1+x\end{vmatrix}=$$

$$a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_3x^{n-3}+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n$$

例 11　计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

解法一　将第2，3，…，n行都加到第1行上去，然后从第1行提出因式$[x+(n-1)a]$，得