技工学校电工类通用教材

数学

中国劳动出版社

技工学校电工类通用教材

数　　学

劳动部培训司组织编写

中国劳动出版社

本书是根据劳动部培训司审定颁发的《技工学校电工类数学教学大纲》编写，供技工学校电工类招收初中毕业生使用的统编教材.

本书内容包括：集合与函数、三角函数与反三角函数、复数、行列式与矩阵、幂函数、指数函数与对数函数、直线与二次曲线.

本书亦可作为各级各类中等职业技术学校、职业高中电工类专业的教材，还可作为企业的中、高级电工培训教材，以及职工和青工自学用书.

本书由丛日明、肖治国、姜静霞编写，丛日明主编；由李庆春、王宗贵审稿，李庆春主审.本书的编写过程得到高敬民、牟广俭的指导.

数　　学

劳动部培训司组织编写

责任编辑　葛玮

中国劳动出版社出版

（北京市和平里中街12号）

地质出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

787×1092毫米　32开本　12.125印张　271千字

1991年8月北京第1版　1991年8月北京第1次印刷

印数：10500册

ISBN 7-5045-0798-9/O·030（课）　定价：3.20元

前 言

为了培训合格的中级电气技术工人，我司委托有关省、市劳动人事部门负责组织编写了一套电工类技工学校教材。包括：数学、机械知识、电工基础、电子技术基础、电工材料、电机与变压器、电力拖动与自动控制、电力系统及运行、安全用电、电工仪表与测量、电气制图、维修电工生产实习以及内外线电工生产实习等13种。这套教材在编写时注意了理论联系实际及其科学性、先进性，反映了电工专业的新技术、新工艺、新材料、新设备，并一律采用了国家统一规定的新标准。它适合于招收初中毕业生、学制为三年的电工类技工学校使用，也可作为中等职业技术学校、职业高中和企业维修电工、内外线电工中级技术工人培训的教材。

技工学校电工专业教学计划中规定开设的政治、语文、物理、制图、企业管理等课程，均采用机械类技工学校的教材。其中物理、制图二门课程另组织编写了教学大纲。

由于编写时间紧促，经验不足，缺点错误在所难免，望各地区、各部门在使用中提出宝贵意见，以便再版时修订。

劳动部培训司

1990.12.

目　录

第一章　集合与函数

集合论是现代数学的基础，其观点与方法已渗入数学的各个分支。本章我们先介绍集合的概念及其运算，然后研究函数及其反函数。

§1—1　集合的概念

一、集合与元素

引例　考察下面几组对象：

（1）1，2，3，4，5；

（2）与一个角的两边距离相等的所有的点；

（3）所有的等腰三角形；

（4）中国人；

（5）某运输公司所有的汽车。

它们都有这样的特点：每一组都是具有某种共同属性的对象的全体。

一般地，具有某种共同属性的不同对象的全体称为**集合**（简称**集**）。集合里的各个对象称为这个集合的**元素**.例如，（1）是由1，2，3，4，5这五个数组成的集合，其中的对象1，2，3，4，5都是这个集合的元素。

二、几种常见的集合

1．数集　　元素是数组成的集合称为**数集**。例如，上面的（1）就是一个数集。

通常，集合用大写拉丁字母表示，元素用小写拉丁字母表示。下面是本书常用的几个数集及其记号：

（1）全体自然数组成的集合称为**自然数集**，记作N；

（2）全体整数组成的集合称为**整数集**，记作Z；

（3）全体有理数组成的集合称为**有理数集**，记作Q；

（4）全体实数组成的集合称为**实数集**，记作R。

一般地，若x是集合A的元素，则称x**属于**A，记作$x\in A$；若x不是集合A的元素，则称x**不属于**A，记作$x\notin A$。例如，$2\in N$，$\sqrt{3}\notin Q$。

2．点集　　元素是点组成的集合称为**点集**。例如，上面引例中的（2）就是一个点集。

3．无限集　　含有无限多个元素的集合称为**无限集**．例如，上面引例中的（2）和（3）都是无限集。

4．有限集　　含有有限个元素的集合称为**有限集**。例如，上面引例中的（1）、（4）和（5）都是有限集。

5．单元素集　　含有唯一的一个元素的集合称为**单元素集**．例如，方程$x-5=0$的解组成的集合（简称**解集**）就是一个单元素集。

6．空集　　不含任何元素的集合称为**空集**，记作ϕ．例如，方程$x^2+1=0$在实数范围内的解集就是空集。

三、集合的表示法

1．列举法　　把集合中的元素一一列举出来，彼此间用逗号分开，写在大括号内表示集合的方法，称为**列举法**。

例1—1　绝对值小于3的整数集可以表示为

$$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}.$$

应该注意，a与$\{a\}$是不同的：a表示一个元素，是个体概念；$\{a\}$表示一个集合（单元素集），是整体概念。

一般地，列举法多用于表示元素个数较少的集合。当元素的个数很多或无限多时，可以列举出有代表性的元素后，用省略号表示那些被省略写出的元素。

例1—2 不超过100的自然数集可以表示为

$$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots 99,\ 100\}.$$

例1—3 整数集可以表示为

$$Z=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \cdots\}.$$

2. **描述法** 把集合中元素的共同属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，称为**描述法**。其一般表达形式为：

$$集合=\{元素|元素的共同属性\},$$

大括号内，竖线前写出这个集合元素的一般形式，竖线后指出元素的共同属性。

例1—4 不等式$x+1>3$的解集可以表示为

$$A=\{x|x+1>3\}.$$

例1—5 方程$x^2-3x+2=0$的解集可以表示为

$$B=\{x|x^2-3x+2=0\}.$$

例1—6 直线$y=x+1$上所有点的坐标组成的集合（也称为点集）可以表示为

$$P=\{(x,y)|y=x+1\}.$$

例1—7 所有奇数组成的数集（简称**奇数集**）可以表示为

$$C=\{x|x=2k+1,\ k\in Z\};$$

所有偶数组成的数集（简称**偶数集**）可以表示为

$$G=\{x|x=2k,\ k\in Z\}.$$

当用数学式子很难指出集合中元素的共同属性时，可以用一段简炼准确的文字描述出元素的共同属性，写在大括号

内表示集合。

例1—8 所有等腰三角形组成的集合可以表示为

$$\{等腰三角形\}。$$

在研究集合的有关问题时，还经常借助图形来表示集合，这是因为它具有形象直观的作用。例如，用一条封闭的曲线所围的域表示一个集合，其内部的点表示这个集合的元素。

例1—9 解不等式$3(1-x)\leqslant 2(x+9)$所得的解集$A=\{x|x\geqslant -3\}$可以在数轴上表示为如图1—1。

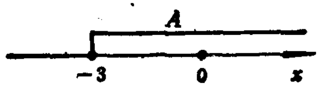


图 1—1

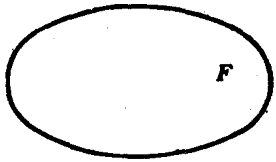


图 1—2

例1—10 所有分式组成的集合$F=\{分式\}$可以表示为如图1—2。

四、集合的简单素性

1．*集合中元素的确定性* 对于一个给定的集合，其元素是确定的。例如，中国人组成的集合中的元素是确定的，而高个子人不作成一个集合，因为它的元素是不确定的，多高才算高个子？

2．*集合中元素的互异性* 对于一个给定的集合，其元素是互异的。也就是说，集合中的元素是没有重复现象的。

3．*集合中元素的无序性* 对于一个给定的集合，其元素是没有顺序的。具体地说，用列举法表示集合时，可以不

计较元素之间的排列顺序．例如，数集 $\{1, 2, 3\}$ 也可以写成 $\{3, 2, 1\}$。

五、子集与真子集

定义1—1 设 A、B 是两个集合．若 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作 A 包含于 B（或 B 包含 A）。

由子集的定义知，**任何一个集合 A 是它本身的子集**，即

$$A\subseteq A,$$

这是因为，A 的任何一个元素都属于 A。

当 A 不是 B 的子集时，即若至少有一个元素 $x\in A$ 但 $x\notin B$，则记作 $A\nsubseteq B$（或 $B\nsupseteq A$），读作 A 不包含于 B（或 B 不包含 A）。参见图1—3。

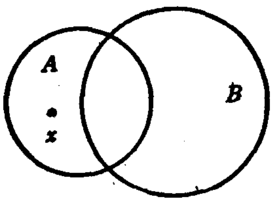


图 1—3

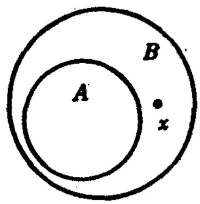


图 1—4

需要注意的是，符号 $\in$ 与 $\subseteq$ 不同：$\in$ 用于表示元素与集合之间的关系；$\subseteq$ 用于表示集合与集合之间的关系。

定义1—2 设 A、B 是两个集合．若 A 是 B 的子集，且至少有一个元素 $x\in B$ 但 $x\notin A$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$），读作 A 真包含于 B（或 B 真包含 A）。

A 真包含于 B 的关系，如图1—4所示。

我们规定，**空集 ϕ 是任何集合的子集，是除它自身外任何**

集合的真子集.

例1—11 如图1—5所示，几个常用数集的包含关系为：$N\subset Z\subset Q\subset R$。

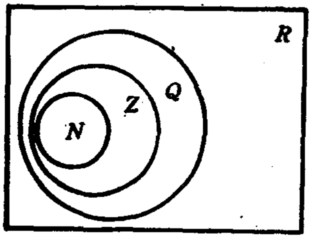


图 1—5

由例 1—11 可以总结到，集合之间的包含关系具有下述传递性质。

定理1—1 设A、B、C是三个集合，

（1）若 $A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$；

（2）若 $A\subset B$且$B\subset C$，则$A\subset C$。

证 (1) 设x是A的任意一个元素．因为$A\subseteq B$，所以 $x\in B$；又因为$B\subseteq C$，所以$x\in C$。从而$A\subseteq C$。

（2）的证明留给读者作为练习。

例1—12 设集合$A=\{a, b, c\}$，试写出 A 的所有子集和真子集。

解 由子集的定义知，A的所有子集是$A_1=\phi$，$A_2=\{a\}$；$A_3=\{b\}$；$A_4=\{c\}$；$A_5=\{a, b\}$；$A_6=\{a,c\}$；$A_7=\{b, c\}$；$A_8=\{a, b, c\}$。

由于A中没有不属于A 的元素，所以由真子集的定义知，A不是A的真子集（可以记作$A\not\subset A$），因而A 的所有真子集是上述的前 7 个。

由例1—12可以总结到，对给定的元素个数是 n 的有限集，其子集的个数是2^n，真子集的个数是2^n-1.

定义1—3 设A、B是两个集合．若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称**A与B相等**，记作$A=B$，读作A等于B。

例1—13 设 $A=\{2, 3\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，求证 $A=B$。

证 $\because$ A中的元素2和3都是方程$x^2-5x+6=0$的解，

$\therefore$ $$A\subseteq B;$$

$\because$ 方程 $x^2-5x+6=0$ 的任意一个解都是集合A中的元素，

$\therefore$ $$B\subseteq A.$$

$\therefore$ 由集合相等的定义知

$$A=B.$$

这一节的最后，我们还要指出，空集ϕ与特殊的单元素集$\{0\}$不同：ϕ不含任何元素，即它的元素个数是0；$\{0\}$含有0这个元素，它的元素个数是1，因而它并不空！

习 题 1—1

1．什么叫集合？

2．集合的元素有哪些特征？

3．集合有哪几种表示方法？

4．试举出日常生活中的三个实际例子，说明它们各作成集合．

5．所有男人能否组成一个集合？所有胖人能否组成一个集合？

6．大于1且小于3的实数集是____限集。

7．小于10的整数集是____限集．

8．小于1000的自然数集是____限集。

9．写出20以内的质数的集合．

10．用符号$\in$或$\notin$填空：

（1）2__N，3__Z，-1__Q；

（2）$\sqrt{2}$__R，0__N，$\frac{1}{2}$__Q；

（3）0__R，-4__Z，0__Z；

（4）$\sqrt{2}$__Z，$\sqrt{2}$__Q，π__R。

11．设$A=\{a, b, c\}$，$B=\{a, b, c, d, e, f\}$，用适当的符号（$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subsetneq$、$\subset$、$\not\subset$、$=$）填空：

（1）a__A，　　（2）b__$\{b\}$；

（3）d__A；　　（4）a__$\{b\}$；

（5）$\{b, c, a\}$__A；　　（6）0__A；

（7）$\{0\}$__B；　　（8）ϕ__B；

（9）A__B；　　（10）0__$\{0\}$；

（11）0__ϕ；　　（12）ϕ__A。

12．设$A=\{0,1,2\}$，写出集合A的所有子集和真子集。

13．设$A=\{a, b, c, d, e\}$，A的子集个数是多少？A的真子集个数是多少？

14．到一个定点的距离等于定长的点集是什么？

15．到一条线段的两个端点的距离相等的点集是什么？

16．集合$\{a_1\}$；$\{a_1, a_2\}$；$\{a_1, a_2, a_3\}$；$\{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n\}$各有多少个子集与真子集？

17．空集ϕ有没有子集？有没有真子集？

18．设$A=\{x \mid x^2+3x+2=0\}$，$B=\{-1, -2\}$，求证$A=B$。

§1—2 集合的运算

一、交集

引例 已知6的正约数集是$A=\{1, 2, 3, 6\}$，8的正

约数集是 $B=\{1, 2, 4, 8\}$。于是，6 和8 的正公约数集是 $\{1, 2\}$。

容易看出，$\{1, 2\}$是由既属于A又属于B的所有元素组成的新集合，其实质就是取了两个集合的公共元素的全体组成一个新的集合。一般地，我们有下述定义：

定义1—4 设A、B是两个集合。由既属于A又属于B的所有元素组成的集合，称为A与B的**交集**（简称**交**），记作$A\cap B$，读作A交B，即

$$\boldsymbol{A\cap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\}}.$$

图1—6中阴影部分表示A与B的交集$A\cap B$。

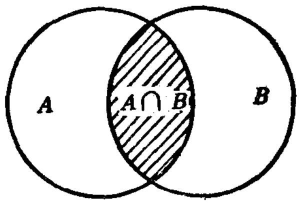


图 1—6

若$A\cap B\neq\phi$，则称A与B相交；若$A\cap B=\phi$，则称A与B不相交。

由交的定义易得，对任何集合A与B，有$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap B=B\cap A$。

例1—14 设$A=\{12\text{的正约数}\}$，$B=\{18\text{的正约数}\}$。用列举法写出12和18的正公约数集。

解 $\because A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$，

$\therefore$ 由交的定义知，12和18的正公约数集是

$A\cap B$

$=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}\cap\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$=\{1, 2, 3, 6\}$。

例1—15 设$A=\{x|x\geqslant-3\}$，$B=\{x|x\leqslant 2\}$，求$A\cap B$。

解 $A\cap B$

$=\{x|x\geqslant-3\}\cap\{x|x\leqslant2\}$

$=\{x|-3\leqslant x\leqslant2\}$，

其意义如图1—7所示。

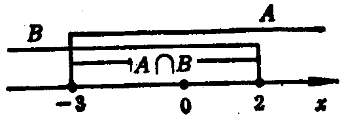


图 1—7

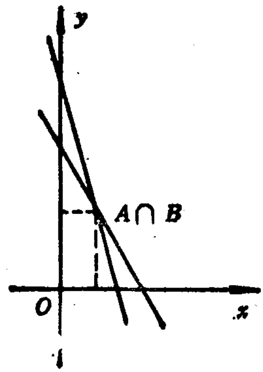


图 1—8

例1—16 设$A=\{(x, y)|4x+y=6\}$，$B=\{(x, y)|3x+2y=7\}$，求$A\cap B$。

解 $A\cap B$

$=\{(x,y)|4x+y=6\}\cap\{(x,y)|3x+2y=7\}$

$=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}$

$=\{(1,2)\}$，

其意义如图1—8所示，是两条直线的交点。

二、并集

引例 已知方程$x^2-1=0$的解集是$A=\{1, -1\}$，方程$x^2-4=0$的解集是$B=\{2, -2\}$。于是，方程$(x^2-1)\cdot(x^2-4)=0$的解集是$\{1, -1, 2, -2\}$。

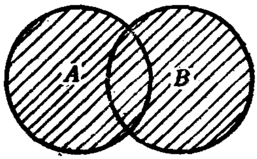
容易看出，$\{1, -1, 2, -2\}$是由属于A或者属于B的

所有元素组成的新集合，其实质就是取了两个集合的全体元素组成一个新的集合。一般地，我们有下述定义。

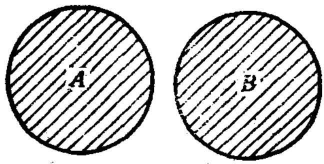
定义1—5 设A、B是两个集合。由属于A或属于B的所有元素组成的集合，称为A与B的**并集**（简称并），记作 $A\cup B$，读作A并B，即

$$\boldsymbol{A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}}.$$

图1—9中阴影部分表示A与B的并集 $A\cup B$，其中包括A与B相交和不相交两种情形。



(a)



(b)

图 1—9

需要注意的是，由集合中元素的互异性知，任何集合中的元素应该是没有重复现象的，所以对两个相交的集合求出的并集，其重复元素只记一次。

由并的定义易得，对任何集合A与B，有$A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$，$A\cup B=B\cup A$。

例1—17 设$A=\{-2，-1，0，1，2\}$，$B=\{1，2，3\}$，求$A\cup B$。

解 $A\cup B$

$=\{-2，-1，0，1，2\}\cup\{1，2，3\}$

$=\{-2，-1，0，1，2，3\}$.

例1—18 设$A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，求$A\cup B$。