初中数学
自学与复习指南

江苏少年儿童出版社

初中数学自学与复习指南

徐世震、高珑珑、勇　青编写

江苏少年儿童出版社

封面设计：徐乐乐

插　　图：勇　青　徐　兵

初中数学自学与复习指南

徐世震　高珑珑　勇　青

江苏少年儿童出版社出版

江苏省新华书店发行　　七二一四印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 7　字数 150,000

1985年2月第1版　1985年2月第1次印刷

印数 1—136,800 册

书号：R7352·046　　定价：0.84元

责任编辑　刘新生

前　言

为了配合初中毕业生系统复习和训练，我们编写了这本《初中数学自学与复习指南》。

本书以教学大纲为准绳，以课本为依据，突出“双基”训练，重视智能培养，便于自学和毕业班系统复习，便于教师教学参考和家长辅导，也有助于推动第二课堂活动的开展。

本书的特点是以心理学观点作指导，渗透现代数学思想，内容系统化，知识系列化，能力培养多样化。

本书内容提要简洁明了；例题设计典型、有趣味并附有说明，以启示读者掌握科学的学习方法。自测练习分甲、乙两卷，甲卷侧重于知识复习，乙卷侧重于能力培养，习题编排有梯度、成系列。

孙国和老师在百忙中审阅了全部书稿，李金安、杜美青、黄瑞荣、江仲叙、郁一奇诸老师提供了宝贵意见。在此，谨表谢忱。

由于编写者水平有限，时间仓促，不当之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

一九八四年十一月

目　录

第一章　实　数

（一）内容提要

1. 自然数

（1）自然数　称1、2、3、4……为自然数(或正整数)。

（2）质数和合数　在自然数集里的数可以分成三类：

〈i〉 单位数——1。

〈ii〉 合数——除了1和本身以外，还能被别的自然数整除的自然数叫合数。

〈iii〉质数——只能被1与本身整除的自然数叫质数。

（3）质因数　把一个合数表示成几个质数的乘积，这些质数叫做这个合数的质因数。

（4）最大公约数与最小公倍数　如果a能被b整除，那么我们就称a是b的倍数，b是a的约数。几个数的公有的因数中，最大的一个因数叫做这几个数的最大公约数，几个数的公有的倍数中，最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。

（5）互质数　如果两个自然数的最大公约数是1，称这两个数为互质数。两个质数一定是互质数，而互质的两个数不一定是质数。

2. 整数集

（1）整数　0，±1，±2，±3……叫整数。

（2）整数的分类　若按“符号”来分类，整数可分成正整

数，零，负整数；若按“能否被2整除”来分类，则可分成两类：一是能被2整除的叫偶数；二是不能被2整除的叫奇数。

3.有理数集

（1）有理数　整数和分数统称有理数。任何有理数均能表示成分数$\frac{m}{n}$的形式（$n \neq 0$）。

（2）数轴　数轴是一条规定了方向、原点和单位长度的直线。原点表示零，原点右边的点表示正数，左边的点表示负数。

说明　对任何一个有理数都能在数轴上找到一点和它对应；但数轴上的任意一点不一定能找到一个有理数和它对应。

（3）相反数　在数轴上位于原点两侧且离开原点距离相等的两个点所表示的数叫做互为相反数；互为相反数的两个数之和为0；0的相反数是0。

（4）绝对值　在数轴上表示一个数的点到原点的距离叫做这个数的绝对值。正数和零的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数。

$$|a|=\begin{cases} a，当 a>0 时； \\ 0，当 a=0 时； \\ -a，当 a<0 时。\end{cases}$$

（5）比较大小　在数轴上的两个点，左边的点所表示的数总比右边的点所表示的数小；正数大于零和负数；零大于负数。两个正数比较大小的法则与小学算术里的法则相同；两个负数的比较法则是绝对值较大的负数

小于绝对值较小的负数。

（6）有理数的运算法则 （略）

4.实数集

（1）方根 如果$x^n=a$，称x是a的n次方根（其中n是大于1的自然数）。求a的n次方根的运算叫开n次方，a叫被开方数，n是根指数。当$n=2$时，x叫做a的二次方根或平方根；$n=3$时，x叫做a的三次方根或立方根。

（2）方根的性质

〈i〉正数的方根 正数a的奇次方根是一个正数，记作$\sqrt[n]{a}$（n是正奇数，且$n\neq1$），正数a的偶次方根是两个数，它们互为相反数，记作$\pm\sqrt[n]{a}$（n是正偶数）。

〈ii〉零的n次方根为零。

〈iii〉负数的方根 负数的奇次方根是一个负数，记作$\sqrt[n]{a}$；负数没有偶次方根。

（3）算术根 正数a的正的一个n次方根叫做a的n次算术根；记作$\sqrt[n]{a}$。当$a>0$，$n=2$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根；负数没有算术根；零的算术根规定为0。

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时,}\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时。}\end{cases}$$

（4）实数 无限不循环小数叫无理数。无理数和有理数统称实数。

5.实数的运算

（1）运算法则 有理数集中的运算法则在实数集中依然适用。

（2）运算定律

〈i〉 交换律 $a+b=b+a$； $a\cdot b=b\cdot a$。

〈ii〉 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$；

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$。

〈iii〉分配律 $m(a+b)=ma+mb$。

（3）运算顺序

〈i〉 对于有括号的式子，一般先进行小括号内的运算，依次进行中括号、大括号内的运算。

〈ii〉 对于没有括号的式子，先算乘方开方部分，再算乘除部分，最后算加减部分。

〈iii〉在同级运算中一般由左向右进行。

说明 为了简化计算，有时可以利用运算定律变更运算顺序。

（二）训练导引

〔例1〕 把 $4\sqrt{14}-15$、π、3.1416、$-\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ 从小到大排列起来。

解：$\because 4\sqrt{14}-15=\frac{-1}{4\sqrt{14}+15}<0$，

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0,$$

而 $4\sqrt{14}+15>\sqrt{2}$， $\therefore 4\sqrt{14}-15>-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

又 $\pi\approx3.14159\cdots\cdots<3.1416$，

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{\sqrt{4}-1}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < 4\sqrt{14}-15 < \frac{1}{\sqrt{3}+1} < \pi < 3.1416。$$

说明 “掌握知识并不等于形成了技能”〔注〕本例既要对实数有全面的认识，又要具有一定的技能。譬如运用有理化分子的手法（这一点应引起重视），将 $4\sqrt{15}-15$ 转化为 $\frac{-1}{4\sqrt{14}+15}$，就可清晰地认出它是负数。

我们还可如此处理：

$\because (4\sqrt{14})^2=224,\ 15^2=225$

$\therefore (4\sqrt{14})^2<15^2,$

而 $4\sqrt{14}>0,\ 15>0$

$\therefore 4\sqrt{14}<15,\quad \therefore 4\sqrt{14}-15<0$。

这里先将整体肢解，而后再作局部处理，它体现了以简驭繁，也是一种重要的常规手法。

〔注〕 引自全国教育学院心理学教材协作编写组编《学校心理学》，教育科学出版社1981年版，下同。

〔例2〕 计算

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{1+\log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} - 2046\cos120^\circ\right] \div 2^{10}。$$

解：$\because \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \neq 0,$

$$\therefore 原式=\left[\left(\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^0 - 2046\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \div 2^{10}$$

$$=1024\div1024$$
$$=1。$$

说明　“数学运算技能是根据有关数学法则经练习而形成的……要正确掌握练习的速度，注意练习的正确性”。根据这一要求，对于一些常见而十分有用的数据或关系式，必须注视它，熟悉它。

研究电子计算机的理论要涉及二进位制，熟记 $2^{10}=1024$，一方面可以借此迅速算出 2^9、2^8、2^{11}、2^{12}，另一方面也有利于二进制与十进制的互化过程的简缩。

〔例3〕　证明一个三位数与它的各位数字之和的差是9的倍数。

证明：设三位数的百位数字是 a，十位数字是 b，个位数字是 c，则此三位数为

$$100\cdot a+10\cdot b+c;$$

而 $(100\cdot a+10\cdot b+c)-(a+b+c)$

$$=99a+9b=9(11a+b)。$$

$\because a$、b 是整数

$\therefore 9(11a+b)$ 是9的倍数。

说明　多位数与各个数位上的数是完全不同的概念，在十进制中，一个多位数的表达式为：

$$a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots\cdots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0$$

其中 a_0、a_1、a_2、……a_n 是各位上的数字。

〔例4〕　证明：形如44、444、4444、……、44……44的数中没有一个是完全平方数。

证明：假定 n 位数44……44是完全平方数，由于44……44＝4（11……11），从而 n 位数11……11也是一个完全平方数，所以11……11必是一个奇数的

平方。

令$11\cdots\cdots11=(2k+1)^2$，则$11\cdots\cdots11=4k^2+4k+1$，

即$11\cdots\cdots10=4(k^2+k)$

$\therefore 55\cdots\cdots5=2(k^2+k)$，奇数与偶数是不能相等的，故矛盾，所以原命题成立。

说明　本题采用直接证法难度很大。鉴于平面几何中已经介绍了反证法，这里特地“在新的情景中复习旧的材料”，藉此以拓展知识视野，并使几何与代数在方法上相互渗透。

〔例5〕　1.考察3^1、3^2、3^3、3^4的个位上的数字各是什么？再继续考察3^5、3^6、3^7、3^8的个位上的数字各是什么？你能分别说出3^{4n-3}、3^{4n-2}、3^{4n-1}、3^{4n}（n是自然数）的个位上的数字是什么吗？

2.试求3^{1001}的个位上的数字。

3.试求7^{1002}的个位上的数字。

解：1.$\because 3^1=3$、$3^2=9$、$3^3=27$、$3^4=81$，

$\therefore$它们个位上的数字分别是3、9、7、1。

又$\because 3^5=3^4\cdot3$，$3^6=3^4\cdot3^2$，$3^7=3^4\cdot3^3$，$3^8=3^4\cdot3^4$，

$\therefore$它们个位上的数字仍然分别是3、9、7、1。

依此类推，可以得出3^{4n-3}、3^{4n-2}、3^{4n-1}、3^{4n}的个位上的数字分别是3、9、7、1。

2.$3^{1001}=3^{4\times250+1}$，

$\therefore$它的个位上的数字是3。

3.由于$7^1=7$，$7^2=49$，$7^3=343$，$7^4=2401$，尔后其个位上的数字就循环出现。

$\because 7^{1002}=7^{4\times250+2}$,

$\therefore$它的个位上的数字是9。

说明 1.“推理是根据已知的判断而作出结论，即推出新的判断，从而达到间接认识事物”。本例采用归纳推理，有一定难度，希读者仔细琢磨，力求理解。

2.如果读者感兴趣，不妨再观察13^{1001}的个位上的数字是什么？你将发现，对它的考察方法只要借助于对3^{1001}的考察方法即可，不必新起炉灶了。请口答，17^{1002}的个位上的数字是多少？

（三）自测练习

自测练习（甲）

1.填充（每格2分，共40分）

（1）最小的正整数是______；最大的负整数是______；最小的非负整数是______。

（2）绝对值等于5的数是______。

（3）平方等于a^2的数是______。

（4）小于10的非负整数有______。

（5）绝对值大于4而小于6.5的整数有______个。

（6）当______时，$|-a|=a$；当______时，$A\cdot B=0$；当______时，$-3x>0$；当______时$|x-1|=|3-x|$。

（7）12、18、48的最大公约数是______；最小公倍数是______。

（8）9^{17}的个位数字是______，17^{1001}的个位数字是______。

(9)在以下空格中填“有”或“没有”。

______最小的自然数，______最小的整数，______最小的正的无理数，______绝对值最小的实数______绝对值最小的非负实数。

2.下列结论是否正确（对的画“√”，错的画“×”（每题2分共20分）

(1)小数是有理数……………………………………（　　）

(2)无限小数都是无理数…………………………（　　）

(3)每一个有理数都能在数轴上找到一个对应的点……………………………………………（　　）

(4)任何一个实数的绝对值都是正数……………（　　）

(5)所有的质数都是奇数…………………………（　　）

(6)$a\cdot b$是正数，则a、b必同号………………（　　）

(7)a是有理数，则$\frac{1}{a}$也是有理数………………（　　）

(8)$a+b>a-b$一定成立…………………………（　　）

(9)任何实数的平方都不会是负数………………（　　）

(10)无理数加上无理数一定是无理数……………（　　）

3.计算（每题4分，共20分）

(1) $(-1)^4\div(-1)^3+0\div28-(-2)(-3)(-4)$；

(2) $1\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\div\frac{1}{3}-2^2\times\left(-\frac{1}{7}\right)$；

(3) $-0.75^2+\left(-1\frac{1}{2}\right)^3+\left(-1\right)^2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$；

(4) $2\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)\left[3-\left(+5\right)\times\left(2-8\right)\right]$；

(5) $\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{3-\dfrac{1}{2}}$。

4.计算（每题5分共10分）

(1) $-6\dfrac{7}{9}-\left[\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+0.2+1\dfrac{3}{5}\div\dfrac{8}{7}\right]$;

(2) $\dfrac{(-3)\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times1\dfrac{1}{2}-4\times\left(-1\dfrac{1}{2}\right)^2}{2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(1\dfrac{1}{2}\right)^2-1}$。

5.写出几组连续的两个整数之积，它们是几的倍数？并证明你得出的结论。（10分）

自测练习（乙）

1.填充：（每格2分共20分）

(1)最小的非负偶数是______，最小的质数是______；

(2)绝对值是 a^2+3 的数是______；

(3)不大于10的非负整数有______个；

(4) $3+\dfrac{1}{x}$ 的倒数是______；

(5)当 x ______时，$\dfrac{1}{|x|-2}$ 有意义；

(6)当______时，$|a^2|=a^2$；

(7)当______时，$a+b>a-b$；

(8)当______时，$(x+3)^2+|y-2|=0$；

(9)两个整数的最大公约数与最小公倍数之积是216，它们的积是______。

2. 判断以下结论是否正确（每题 2 分共 10 分）

(1) 若 $a^2>1$，则 $a>1$ …………………………（　）

(2) 一个数的绝对值大于 1，那么这个数一定大于它的倒数…………………………（　）

(3) 一个数的算术平方根与这个数的差一定是非正数…………………………（　）

(4) 两个无理数的积一定是无理数。……………（　）

(5) 只有在 $x>1$ 时，$x^2>x$ 才成立。…………（　）

3. 一个五位数 1 2 3 a 4，a 为何值时，它是 4 的倍数？ 9 的倍数？ 6 的倍数？ 11 的倍数？（10 分）

4. 以下各数中哪一个数是最小的正数。（6 分）

$10-3\sqrt{11}$、$3\sqrt{11}-10$、$18-5\sqrt{13}$、$51-10\sqrt{26}$、$10\sqrt{26}-51$。

5. 计算以下各题（每题 6 分共 24 分）

(1) $\left\{2\frac{3}{16}-\left[4-\left(2\frac{1}{2}-1\frac{1}{5}\right)\times3.5\right]\div0.16\right\}\times\left(1\frac{49}{60}-1\frac{23}{36}\right)$；

(2) $\dfrac{(-2)^3\times(-3)^2-\sqrt{(-12)^2}\div\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{(-2)^2(-0.38)\div[1-3^2\times(-2)]}$；

(3) $\dfrac{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$；

(4) $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\sqrt{12-2\sqrt{35}}$。

6. 写出几组数（每组有两个正整数）计算出各组数的最大公约数与最小公倍数之积，请仔细观察，能得出什么结论，并证明结论。（10分）

备 用 题

1. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$的整数部分是$a$，小数部分是$b$，

求 $a^2+\dfrac{1}{2}ab+b^2$之值。

2. 连续3个自然数的乘积是几的倍数？证明你得出的结论。

第二章 代数式

（一）内容提要

1. 代数式

（1）代数式 用运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子叫代数式。单独的数或字母也叫代数式。

（2）代数式的值 用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果叫代数式的值。

（3）代数式的分类