国际物理奥赛·中国队总教练、领队担纲

高中物理竞赛培优教程

主　编　舒幼生
副主编　钟小平

浙江大學出版社

高中物理竞赛培优教程

主　编　舒幼生

副主编　钟小平

编　委　陈明华　沈中锋　沈朝晖

杨科军　赵　登　厉守清

陆文辉

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中物理竞赛培优教程 / 舒幼生主编．—杭州：浙江大学出版社，2003.7
ISBN 7-308-03363-5

Ⅰ．高...　Ⅱ．舒...　Ⅲ．物理课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 050718 号

出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路38号　邮政编码310027）
（E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
责任编辑　王同裕
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江万盛达实业有限公司
开　　本　787mm x 960mm　1/16
印　　张　33.5
字　　数　674 千字
版 印 次　2003年7月第1版　2006年2月第7次印刷
印　　数　32001-36000
书　　号　ISBN 7-308-03363-5/G · 610
定　　价　39.00 元

前　言

中学物理教育是基础教育的重要组成部分。每年一度的全国中学生物理竞赛在激发中学生对物理学科的热爱和学习兴趣，培养科学思维能力等方面起到了重要作用，并产生了积极的影响，因此越来越受到中学师生的重视。

为了配合中学生参加全国中学生物理竞赛，向他们提供可读性强，有实用参考价值的阅读材料，我们依据 2002 年起新施行的竞赛大纲编写了本书。本书通过知识要点、例题分析、巩固习题、综合训练、问题与讨论等栏目，详细地阐述了当今物理竞赛的新趋势、新特点、新题型。特别是对新大纲增加的角动量及狭义相对论专门开辟章节进行了阐述。相信通过阅读该书，读者一定能收到扩大知识面，提高分析问题和解决问题的能力。提高灵活运用物理知识的能力，达到提高竞赛成绩的效果。因此本书是中学生课外阅读和竞赛训练的理想读物。

本书由北京大学教授、国际物理奥赛中国队总教练舒幼生主编，参加本书编写的是杭州学军中学钟小平，杭州高级中学陈明华、浙江萧山中学沈朝晖，浙江省诸暨中学杨科军、赵登，湖州市教研室沈中锋、湖州中学厉守清、富阳中学陆文辉，最后由舒幼生、钟小平审定，统稿。

本书编写过程得到了浙江省物理竞赛委员会副主任周彩莺，浙江省物理学会秘书长赵隆韶、浙江师范大学物理系主任宗丰德等专家、教授大力支持和帮助；清华大学陈凯亮、冯涛同学、复旦大学刘集思同学、上海交通大学范鸿敏同学为本书习题的验算及校对做了不少工作，在此谨向他们表示衷心的感谢。由于编者水平有限，错误和不足在所难免，恳请读者批评指正。

目　录

第一章　运动学

第一节　质点运动的基本概念

【知识要点】

物体位置随时间而变化，称机械运动．力学是研究机械运动的一门学科．几乎在物质的一切运动形式中都包含机械运动这种最基本的形式，因而力学是许多学科的基础．

研究机械运动，一般采取由表及里，从现象到本质的步骤．描述机械运动现象的科学称运动学．研究机械运动的内在规律的科学称动力学．运动学是研究物体运动状态及其变化的描述，而不管这种变化的原因．物体在任一时刻的运动状态通过位置、速度等物理量来描述．运动随时间的变化可以通过运动学方程来研究．

一、参照系、质点

要正确确定物体的位置及其变化，必须事先选取另外一个假定为不动的物体作为参照才有意义．这个选来作为参照的物体就叫做参照物．而为了定量地描述物体的运动，还需在参照物上建立坐标系，这样的参照物称为参照系．通常选直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 作为参照系，有时也选极坐标系．

任何实际物体都有一定的形状和大小，但是在分析具体问题时，有时可以忽略物体的形状和大小，而把它们看作是具有一定质量的几何点，称为质点．质点是实际物体的理想化模型．在物理学中，常用理想模型代替实际研究对象，突出其性质而忽略其次要因素．一个物体能否视为质点取决于所研究的问题．

二、位置、位移和路程

位置是运动质点在某一时刻的空间处所．在直角坐标系中，可用质点在坐标轴上的投影坐标(x,y,z)来表示．在定量计算时，为了使位置的确定和位移的计算一致，人们还常引入位置矢量（简称位矢）的概念．在直角坐标系中，位矢 r 定义为自坐标原点到质点位置 $P(x,y,z)$所引的有向线段，其大小为$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其方向自原点 O 指向质点 P．

位移是指质点运动过程中，在一段时间 Δt 内位置的变化，即位矢的增量 $\Delta s = r(t+\Delta t) - r(t)$，它的方向自始位置指向末位置．在直角坐标系中，在计算位移时，通常先求 x 轴、y 轴、z 轴三个方向上的三个分量后，再按矢量合成法求合位移．

路程是指质点在 Δt 时间内通过的实际轨迹的长度，它是标量，只有在单方向的直线运动中，路程才与位移的大小相等．

三、速度与速率

速度和速率是描述质点运动快慢的物理量．

1．平均速度和平均速率

平均速度是质点在一段时间内通过的位移与所用时间之比，即 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$．

平均速度是矢量，方向与位移 Δs 的方向相同．

平均速率是质点在一段时间内通过的路程和所用的时间的比值，是标量．

2．即时速度和即时速率

即时速度是质点在某一时刻或某一位置时的速度，它定义为 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限，简称速度，即 $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$．

即时速度是矢量，它的方向就是平均速度极限的方向，即时速度的大小称即时速率，简称速率．

四、加速度

加速度是描述运动变化快慢的物理量，它等于速度对时间的变化率，即 $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$．

从上式求得的实际上是质点运动的平均加速度，依平均速度和瞬时速度知识可得即时加速度为 $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$．

【例题分析】

例 1　已知某质点的运动学方程为 $x = t^2 + 4\text{m}$，试求第 1 秒末到第 2 秒末这段时间内的平均速度及瞬时速度、加速度．

解　平均速度为

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(t_2^2 + 4) - (t_1^2 + 4)}{t_2 - t_1} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = 3(\text{m/s})$$

方向沿 x 轴的正方向．瞬时速度为

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^2 + 4 - (t^2 + 4)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t(\text{m/s})$$

因此，1 秒末和 2 秒末的速度分别为 2m/s、4m/s．加速度为

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(t + \Delta t) - 2t}{\Delta t} = 2(\text{m/s}^2)$$

例 2 蚂蚁离开巢沿直线爬行，它的速度与到蚁巢中心的距离成反比．当蚂蚁爬到距巢中心 $l_1 = 1\text{m}$ 的 A 点处时，速度是 $v_1 = 2\text{cm/s}$．试问蚂蚁继续由 A 点爬到距巢中心 $l_2 = 2\text{m}$ 的 B 点需要多长的时间？

解法一 将蚁巢中心定为坐标原点 O，OA 连线即为 x 轴正向，则坐标 x 处蚂蚁的速度可表示为

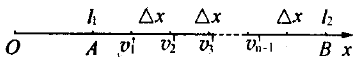

图 1-1-1

$$v = s/x = l_1 v_1 / x$$

即
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{l_1} \cdot \frac{x}{v_1}$$

将 A 和 B 连线分成 n 等份，如图 1-1-1 所示，每份长 $\Delta x = (l_2 - l_1)/n$，对应的速度为 $v_1, v'_1, v'_2, \cdots, v'_{n-1}, v_2$．当 n 很大时，每小段运动可看成匀速运动，由 A 到 B 所需的总时间为：$T = \frac{\Delta x}{v_1} + \frac{\Delta x}{v'_1} + \frac{\Delta x}{v'_2} + \cdots + \frac{\Delta x}{v'_{n-1}}$

注意到$\left\{\frac{1}{v}\right\}$是一等差数列，故 $T = \frac{l_2 - l_1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v'_{n-1}}\right) n}{2} = \frac{l_2 - l_1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v'_{n-1}}\right)$

当 $n \to \infty$ 时，$v'_{n-1} \approx v_2$，即 $T = \frac{l_2 - l_1}{2} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2 l_1 v_1}$，代入数据得 $T = 75\text{s}$．

解法二 因蚂蚁运动的速度 v 与蚂蚁离巢的距离成反比，故 $\frac{1}{v} \propto x$，作出$\frac{1}{v}$-x 图像如图 1-1-2 所示，为一条通过原点的直线．将 AB 连线分成相等的足够小 n 段，每一小段的时间 $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_i}$，其数值近似对应着$\frac{1}{v}$-$x$ 图像中的矩形面积．当 $n \to \infty$ 时，矩形面积之和即等于梯形面积，故蚂蚁从 A 到 B 时间

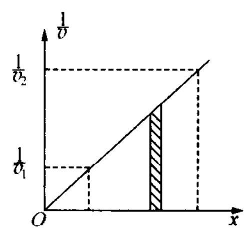

图 1-1-2

$$T = \frac{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)(l_2 - l_1)}{2} = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2 l_1 v_1} = 75(\text{s})$$

注：比较两种解法，显然解法二比解法一简便清晰得多，可见图像法解题在物理问题中十分有用．另外还需注意，这两种解法中都用到了分割求和的处理手法．

例 3 有两把齿距不同的梳子，其中一把每厘米有 4 个齿，另一把每厘米有 5 个齿．今将其重叠起来，再透过其齿间的缝隙去看亮光，则可以看到亮段和暗段交替出现．如果把其中的一把梳子以 1cm/s 的速度移动，问亮的部位将以多大的速度移动？

解 如图 1-1-3，我们以黑白两色的梳子表示题述的两梳子．它们重叠在一起，其中白色梳子每厘米有 4 个齿，黑色梳子每厘米有 5 个齿．图中 A 处两梳子的齿刚好重叠在一起．显然，两梳子的齿重叠后，在 A 处附近透光的间隙较多，透过它去看亮光，这里就是一个“亮段”的中心．而图中 B 处两梳子的齿相互错开的距离最大，这里能透光

的间隙就是最少，故此处是一个“暗段”的中心．当两梳子间有相对运动时，这些亮段和暗段会随之移动．明显可以看到，当发生移动时，亮段和暗段的移动速度是相同的．以下我们仅讨论亮段的移动速度．

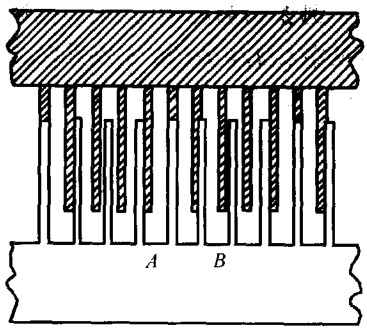

图 1-1-3

（1）当白色梳子不动，黑色梳子以速度 $v=1\mathrm{cm/s}$向右移动．设原来黑、白色梳子的对应两齿刚好在 A 处重叠，则由于黑色梳子的移动，接着发生的便是紧邻 A 处右侧的那个黑色梳齿和白色梳齿重叠，这相当于上述的亮段的中心由 A 处移至 A 右侧第一个白色梳齿处．由此，这段移动的距离为白色梳子的齿距，即 $\Delta s_1=\frac{1}{4}\mathrm{cm}$．

这一过程中黑色梳子移动的距离为黑白两梳子的齿距之差，即

$$\Delta s=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}(\mathrm{cm})$$

以 v_1 表示此时亮段移动的速度，乃有$\frac{\Delta s_1}{v_1}=\frac{\Delta s}{v}$，所以

$$v_1=\frac{\Delta s_1}{\Delta s}v=\frac{1/4}{1/20}\times 1=5(\mathrm{cm/s})$$

由上叙述中还可以看到，此时亮段移动速度方向是向右的，即亮段移动速度方向与移动的梳子（黑梳子）的移动速度方向是相同的．

（2）当黑色梳子不动而白色梳子以速度 $v=1\mathrm{cm/s}$ 向右运动时，同样设原来黑白梳子对应的两齿刚好在 A 处重叠，则由于白梳子的移动，接着发生的便是紧邻 A 处左侧的那个黑色梳齿和白色梳齿相重叠．这相当于上述的亮段的中心由 A 处移至 A 左侧第一个黑色梳齿处，这一过程中亮段移动的距离为黑色梳子的齿距，即 $\Delta s_2=\frac{1}{5}\mathrm{cm}$．

这一过程中白色梳子移动的距离为黑、白两梳子的齿距之差，即 $\Delta s=\frac{1}{20}\mathrm{cm}$．

以 v_2 表示此时亮段移动的速度，乃有$\frac{\Delta s_2}{v_2}=\frac{\Delta s}{v}$．所以

$$v_2=\frac{\Delta s_2}{\Delta s}v=\frac{1/5}{1/20}\times 1=4(\mathrm{cm/s})$$

由上叙述还可以看到，此时亮段移动的速度方向是向左的，即亮段移动速度方向与移动梳子（白梳子）的移动速度方向是相反的．

注：（1）本题中，有人认为亮段移动的速度就应该等于梳子移动的速度，这是因为对亮段和暗段如何形成没有作具体分析而形成的想当然的想法．正确的思路应该是由亮段的形成机理出发来理解亮段的移动．这里值得注意的不仅是亮段移动速度的大小与

梳子移动速度的大小不等，而且这两个速度的方向也可能不同.

(2)和本题描述的情景十分相似的一个例子是使用游标卡尺时，当移动游标卡尺的游标尺（设其主尺不动）时，游标尺上的刻度线和主尺上的刻度线互相正对的位置也随之移动，这个两尺上刻度线正对的位置就相当于本题中的亮段中心或暗段中心，其移动速度与游标尺的移动速度也是不同的.

【巩固习题】

1. 摄制电影时，为了拍摄下落物体的特写镜头，做了一个线度为实物的$\frac{1}{49}$的模型. 放电影时，走片速度为每秒 24 张，为了使画面逼真，拍摄时走片速度应为多大？模型的运动速度应为实物运动速度的多少倍？

2. 一固定的直线轨道上 A、B 两点间距 s，将 s 作 n 等分，令质点从 A 出发由静止开始以加速度 a（常量）向 B 运动，当质点到达每一等分段末端时它的加速度增加$\frac{a}{n}$，试求质点到达 B 点时的速度 v_B.

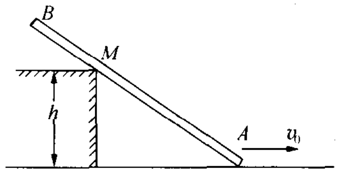

图 1-1-4

3. 如图 1-1-4 所示，当杆的 A 端以恒定速度 v_0 沿水平方向运动时，接触点 M 则向 B 端移动，当 $AM=2h$ 时，接触点 M 向 B 端移动的 v 为多少？

4. 磁带录音机的空带轴以恒定角速度转动，重新绕上磁带. 绕好后带卷的末半径 $r_末$ 为初半径 $r_初$ 的 3 倍，如图 1-1-5 所示. 绕带的时间为 t_1. 要在相同的带轴上重新绕上厚度为原磁带一半的薄磁带，问需要多少时间 t_2？

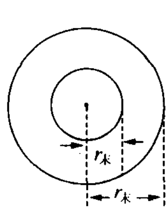

图 1-1-5

5. 在听磁带录音机的录音时发觉，经过时间 $t_1=20$ 分，带轴上带卷的半径减小一半. 问此后半径又减小一半需要多少时间 t_2？

6. 小球从高 $h_0=120\text{m}$ 处自由落下，着地后跳起，又落下，每与地面相碰一次，速度减少$\frac{1}{n}$（$n=2$）.（1）作出小球的 v-t 图像（向上为正）；（2）求小球从下落到停止的总时间和总路程（g 取 $10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$）.

7. 如图 1-1-6 所示装置，在绳的 C 端以速率 v 匀速收绳，从而拉动低处的物体 M 水平前进，当绳 BC 段与水平恰成 α 角时，求物体 M 的速度？

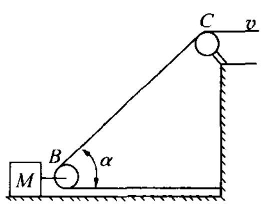

图 1-1-6

8. 在以速度 v_0 行驶的小汽车正前方 L 处有一辆载重卡车. 由于大雾，使得公路上能见度很低，当小车司机发现这一情况时，卡车正以加速度 a 由静止开始作匀加速运动，其方向与小车

运动方向一致，于是小车司机立即以加速度 $2a$ 作减速运动，那么小车速度 v_0 必须满足什么条件，小车才不致于和卡车相撞？

9. 如图 1-1-7 所示，A 和 B 两物体位于同一竖直直线上，距地面高度分别为 $h_A=20\text{m}$，$h_B=40\text{m}$，当 A 物体以 $v_0=10\text{m/s}$ 的初速度竖直上抛时，B 物体恰好同时开始作自由落体运动，求 A 和 B 将在距地面多高的地方相遇？（$g=10\text{m/s}^2$）

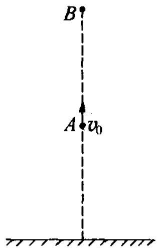

图 1-1-7

10. 一质点在平面上作匀变速运动，在时刻 $t=1\text{s}$、3s、5s 时，质点分别位于平面上的 A，B，C 三点，已知 $\overline{AB}=8\text{m}$，$\overline{BC}=6\text{m}$，且 $AB\perp BC$. 试求此质点运动的加速度是多少？

第二节　运动的合成

【知识要点】

一、矢量和标量

只有大小、没有方向的量称为标量，如质量、功等，可直接加减. 既有大小又有方向的量称为矢量，如力、位移、速度、加速度等. 矢量合成按平行四边形法则，即两分量构成平行四边形的两邻边，合矢量为该平行四边形与两分量共点的对角线. 由平行四边形法则又衍生出三角形法则，多个矢量的合成又可推导出多边形法则.

同一直线上的矢量运算可以简化为代数运算，不在一直线上的矢量运算一般通过正交分解法求得，即把各个矢量向互相正交的坐标轴上分解，求得各方向的分量和后，再求合矢量.

二、运动的合成法则

运动的合成包括位移、速度和加速度的合成，遵守矢量合成法则——平行四边形法则.

我们一般把质点对地或对地面上静止物体的运动称为绝对运动，质点对运动参照系的运动称相对运动，而运动参照系对地的运动称牵连运动. 以速度为例这三种速度分别称绝对速度、相对速度、牵连速度，则

$$v_{绝对}=v_{相对}+v_{牵连}$$

或

$$v_{甲对乙}=v_{甲对丙}+v_{丙对乙}$$

位移、加速度之间也存在类似关系. 但必须注意以上两式是矢量式，具体运算按平行四边形法则.

我们在研究复杂运动时，常把它分解为两个或几个简单的分运动来研究，任何一个

方向上的分运动,都按其本身的规律进行,不会因为其他方向的分运动是否存在而受影响,这叫运动的独立性原理.如平抛运动就可看作互不影响的水平方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动的合成.

三、物系相关速度

正确分析物体(质点)的运动,除可以用运动的合成知识外,还可充分利用物系相关之间的关系简捷求解.以下三个结论在实际解题中十分有用.

1. 刚性杆、绳上各点在同一时刻具有相同的沿杆、绳的分速度.

2. 接触物系在接触面法线方向的分速度相同,切向分速度在无相对滑动时亦相同.

3. 线状交叉物系交叉点的速度是相交物系双方沿双方切向运动分速度的矢量和.

【例题分析】

例 1　设河水流速为 v_1,小船在静水中航行速度为 v_2,若小船从一岸行驶到对岸,问当船的航行方向怎样时,才能(1)小船所花的时间最短;(2)小船所经过的路程最短?

分析　以地球为参照物,小船渡河的速度是由水速和船速合成的:$v = v_1 + v_2$,解此题要注意的是渡河过程中,一是水和船都在同时运动(等时性),二是从此岸到彼岸只有船速才起作用(互不相干性):

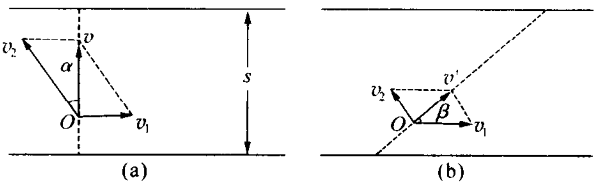

图 1-2-1

解　(1)小船渡河到对岸所花时间只与船速有关,要使时间最短,必须让航行方向垂直水流直指对岸.

(2)当 $v_2 > v_1$ 时,显然,最短的路程即河宽 s,如图 1-2-1(a)所示,航行方向为偏向上游一个角度,其角度大小为 $\alpha = \arcsin v_1/v_2$.

当 $v_2 < v_1$ 时,垂直河岸的航行方向驶向对岸是不可能的,但总可以找到一个这样的方向,使得航行的路程最短:如图 1-2-1(b),设小船实际航行速度为 v',与河岸夹角为 β,实际路程为 L,则有 $L = s/\sin\beta$,要求 L 的极小值,即要求 $\sin\beta$ 的最大值.在速度合成的矢量三角形 $Ov'v_1$ 中,设 $\angle Ov'v_1 = \theta$,运用正弦定理

$$\frac{v_2}{\sin\beta} = \frac{v_1}{\sin\theta},\quad \sin\beta = \frac{v_2}{v_1}\sin\theta,\quad \sin\beta_{\max} = \frac{v_2}{v_1}$$

由上可见，只有当 $\theta=\pi/2$，即合速度与船速垂直时，小船才有最短路程，此时船的航行方向是：偏向上游，与水流的夹角为 $\pi/2+\arcsin v_2/v_1$，其所经过的路程为

$$L_{\min}=\frac{s}{\sin\beta_{\max}}=\frac{s}{v_2/v_1}=\frac{sv_1}{v_2}$$

例 2 如图 1-2-2 所示，AB 杆的 A 端以匀速 v 运动，在运动时杆恒与一半圆周相切，半圆周的半径为 R. 当杆与水平线的交角为 θ 时，求杆的角速度 ω 及杆上与半圆相切点 C 的速度和杆与圆柱接触点 C' 的速度大小.

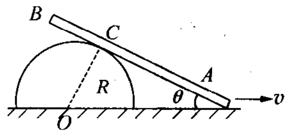

图 1-2-2

解 由于半圆静止，杆上 C 点的速度的法向分量为零，故杆上 C 点速度必沿杆. 以 C 点为基点，将杆上 A 点速度 v 分解成沿杆方向的分量 v_1 和垂直于杆方向的分量 v_2，如图 1-2-3 所示，则 v_1 是 A 点与杆上 C 点相同的沿杆方向平动的速度，v_2 是 A 点对 C 点的转动速度. 故杆上 C 点速度为

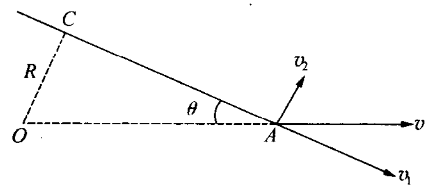

图 1-2-3

$$v_c=v_1=v\cos\theta,\quad v_2=v\sin\theta=\omega\cdot\overline{AC}.$$

而 $\overline{AC}=R\cot\theta$，故 $\omega=\dfrac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta}$.

杆与圆柱交点 C' 沿圆周运动，杆转过的角度与半径转过的角度相同，所以杆的转动角速度与 C' 点的角速度相同(如图 1-2-4 所示)，所以 C' 点的速度为 $v_{c'}=\omega R=v\tan\theta\sin\theta$

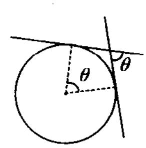

图 1-2-4

注：球上 C' 点与杆上 C 点虽为同一点，但两者之间有相对滑动，故球上 C' 点速度不是 $v\cos\theta$. 有兴趣的同学还可通过讨论极短时间内的位置变化求得球上 C' 点的速度为 $v\tan\theta\sin\theta$.

例 3 一个半径为 R 的环(环心为 O_2)立在水平面上，另一个同样大小的环(环心为 O_1)以速度 v 从前一环的旁边经过. 试求当两环环心相距为 $d(2R>d>0)$ 时，两环上部的交点 A 的运动速度. 两环均很薄，可以认为两环是在同一平面内，第二个环是紧贴着第一个环擦过去的.

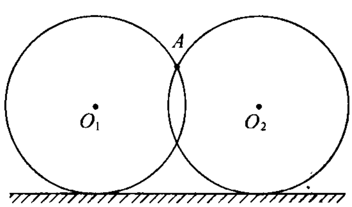

图 1-2-5

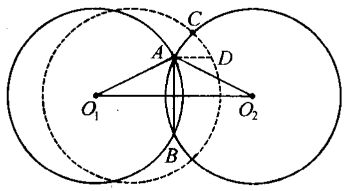

图 1-2-6

解法一 用微元法求解

设两环心相距为 d 时刻的位置如图 1-2-6 中的实线所示，自此时刻起，经历一段极短的时间 Δt 很小，故图中的 A,C,D 三点是相距很近的（为使图中相对位置清楚，图中的位移是夸大了的），则 $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{DC}$ 可以近似地看成是与弦 AC,DC 重合的．故这段时间内，动环的位移可用 AD 表示，交点的位移可用弦 AC 表示，其大小分别为

$$AD = v\Delta t, AC = v_A\Delta t$$

所以

$$v_A = \frac{AC}{AD}v \qquad ①$$

上式中 v_A 为交点的移动速度．又以 α 表示等腰 $\triangle AO_1O_2$ 的底角，且视 AC 为一小段弦，则由图中有 $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \angle DAO_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$，

又在等腰 $\triangle ADC$ 中，有 $AD = 2AC\cdot\cos\angle CAD$，即 $AD = 2AC\cdot\sin\alpha$ ②

以②式代入①式有 $v_A = \dfrac{v}{2\sin\alpha} = \dfrac{v}{2\sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\Big/R} = \dfrac{Rv}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$

解法二　由速度的分解求解

仍如图 1-2-6，由于交点是在不动的环上由 A 点移至 C 点，故交点的移动速度必沿不动圆环的切线方向；另一方面，可以从水平方向上来考察交点的运动．当交点由 A 移至 C 时，由于交点在水平方向上的坐标总是与两环心连线中点的坐标相同，则在任何一段时间内此交点的水平位移总是环心 O_1 的水平位移的一半，即此交点速度的水平分量是 $v_{A/\!/} = \frac{1}{2}v$.

由上一解法中已得出 v_A 的方向与水平方向的夹角为 $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$，则有

$$v_{A/\!/} = v_A\cos\angle CAD = v_A\sin\alpha$$

故得

$$v_A = \frac{v_{A/\!/}}{\sin\alpha} = \frac{v}{2\sin\alpha} = \frac{Rv}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

注：本题所用的两种解法是求解运动学问题时常用的方法．特别是微元法，更是物理学中分析和求解问题时常用的方法．

在物理学的问题中，往往是针对一个对象经历某一过程或处于某些状态来进行研究，而在此过程中或状态之间，描述研究对象的物理量有可能是不变的，更多的则可能是变化的．对于那些变化的量的研究，有一种方法是把全过程分为很多短暂的小过程或把研究对象的整体分解为很多微小的局部来考察，然后通过对这些小过程或微小局部的研究而归纳出适用于全过程或者是整体的结论．这些微小过程或者是微小局部常被称为“微元”，这种方法也就被称为“微元法”．