蘇聯青年數學科普叢書

29

什麼是線性規劃？

王智秋 石冶郴譯

九章出版社・開明（大陸）出版社　聯合出版

凱聯青年數學科普叢書
29

什麼是線性規劃？

ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ？

А.С.БАРСОВ 原著
王智秋 石治郁 譯

九章出版社・開明(大陸)出版社 聯合出版

國立中央圖書館出版品預行編目資料

什麼是線性規劃？/ A. S. Barsov 原著；王智秋,石冶郝譯
-- 一版. -- 臺北市：九章, 2004 [民國 93]
面； 公分.—(蘇聯青年數學科普叢書；29)

譯自：What is Linear Programming?
ISBN 957-603-252-0(平裝)

1. 線性代數

313.3 93010724

《蘇聯青年數學科普叢書》29

什麼是線性規劃？

What is Linear Programming?

A. S. Barsov 原著

王智秋 石冶郝 譯

出 版 者：九章出版社
台北市信義路 3 段 147 巷 15 弄 5-1 號 7 樓
局版臺業字第 2327 號
門市地址：台北市信義路 3 段 147 巷 17 弄 7-1 號 1 樓
電　　話：(02)23257970・23252455・27014363
傳　　真：(02)27067353
e-mail：ccmp@seed.net.tw
發 行 人：孫文先
印 刷 者：九章文具印刷品有限公司
出版日期：2004 年 7 月一版一刷
定　　價：150 元整
郵政劃撥：10534676 九章出版社
總 經 銷：成信文化事業股份有限公司
台北縣中和市中山路二段 366 巷 10 號 10 樓

查詢本社圖書目錄http://www.chiuchang.com.tw

目　　録

引　言

線性規劃至今已經有半個多世紀的發展歷史了，它有廣泛的實際應用．關於這方面工作的創始人是蘇聯科學院院士 Л. В. 康托羅維奇(Канторович)，他對許多如何提高運輸安排的效率以確定最好的生產方案和高效率的原材料分配等問題給出了數學方法．後來，線性規劃的一般方法被發展爲：單純形法，組合法和其他的一些方法，這些方法的應用可以使各種各樣問題的處理達到最優狀況的解．G. B. 丹齊格(Dantzig)，A. 查尼斯(Charnes)和蘇聯人以及其他國家的一些科學家發展了這些方法．

線性規劃關注如下的具有共同特性的大量問題的解法：給定某一個量(例如費用或時間)它是一些變量的線性函數．這些變量，依次需要滿足線性方程組或不等式組，我們需要找到這些變量的那樣取值，它們是非負的，並且使得給定的量達到極大值或極小值．

作爲一個例子，讓我們考慮一個運輸問題．

我們要運送貨物，從 m 個發送點，稱爲發點，到 n

個收點．在第 i 個發點有 a_i 單位貨物($i=1,2,\cdots,m$)，而在第 j 個收點可以接收 b_j 單位貨物($j=1,2,\cdots,n$)，現假設．

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

要求我們設計一個運送這批貨物的操作方案使得費用最少．

設 x_{ij}是從第 i 個發點運往第 j 個收點的單位貨物的數量，在數學上把問題簡化爲找非負量 x_{ij}滿足等式

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

使總運輸費用

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

是最少的，其中 c_{ij}是從第 i 個發點到第 j 個收點運送每單位貨物的費用．

另一個涉及有關運輸的問題如下：有 m 個發點 n 個收點，設計一種卡車運輸方案，使之儘可能快地完成．

還有一個例子是這樣，假設有一個工廠在它的裝配線上有 n 個型號的產品需要加工，而工廠有 m 種設備，每種可以生產任何一種型號的產品．其中第 i 個設備

$(i=1,2,\cdots,m)$每月可持續不斷地操作不超過某規定的時間長度 b_i，它生產一單位的第 j 型號產品$(j=1,2,\cdots,n)$要花費時間 t_{ij}. 在第 i 個設備上生產一單位的第 j 型號產品的費用爲 c_{ij}. 如果工廠在一個月内對每種產品至少要生產達到某規定的數量 a_j,那麼問題就是如何組織工作從而能以最小的費用完成這個配額.

如果我們用 x_{ij}表示在第 i 個設備上生產第 j 型號產品的數量,則問題從數學上可簡化爲找非負量 x_{ij},使得它滿足

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant a_j \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \leqslant b_j \qquad (i=1,2,\cdots,m),$$

而費用

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

是最小的.

在線性規劃處理的問題中,限制一些變量可取值的範圍的條件是由一個線性方程組或不等式組給定的. 同樣,我們希望取值爲極小或極大的函數也是這些變量的一個線性函數. 名稱"線性規劃"就同時强調了這兩個方面.

而且,在一些實際問題(例如,在幾個限制條件下,

大量車床或罐裝機器的工作負擔的最優分配)的分析中就是如此:從一個數學解到另一個數學解的檢驗就對應於不同生產規劃的檢驗——即“線性規劃”.

既然上述問題的解包含在一個區域(可行域)中找某點使得目標函數的值可達到極大值或極小值,自然會問:爲什麽我們不用熟知的經典微積分方法來找極值?答案是這些經典方法需要極值達到的點的偏導數的存在性. 一個線性函數可以在定義區域的邊界達到它的極值,而此時偏導數卻不存在. 正是這個事實導致了處理極值問題新方法的産生,線性規劃的方法就是其中之一.

用線性規劃解決問題的經驗表明,當存在大量的方程時,電子計算機的使用就是必不可少的了. 在幾分鐘内,這些機器能够解決一個人一星期去做的問題. 當方程的個數十分巨大時,問題就只能由計算機解決了. 其中一個例子是確定一個運輸沙子到莫斯科的建築工地的最優方案. 此時有 10 個發點和 230 個收點. 1958 年 6 月,此問題在“Strela”機上僅用 10 天就得到結果,並且節約了 11%的費用.

在這本小册子中,我們將考察用於求解線性規劃的某些問題——尤其在運輸問題中的數學原理和方法.

一、線性代數的一些概念和定義

在這裏我們介紹 m 維空間中線性代數的基本概念，它們在學習線性規劃的過程中將是必不可少的.

1. m 維空間的概念

任何由實數組成的三元有序數組 (a_1, a_2, a_3) 都可以看成是幾何上空間中的一個點.這使得我們有下述定義:

定義 把所有實數三元有序數組的集合稱爲三維空間.①

按照這一定義，我們說數列 (a_1, a_2, a_3) 確定了三維空間中一個坐標爲 a_1, a_2, a_3 的點 M 或是同一空間中的分量爲 a_1, a_2, a_3 的一個向量 $\mathbf{P}$. 然而，爲區分某些對象、方法或狀態，三個實數往往是不够的. 例如，爲了完整描述空間的一個剛體的位置和方向就需要六個實數. 又例如，假設我們希望描述某些工業品和農業品如火車，汽

① 類似地，把全體實數 (a_1) 的集合稱爲一維空間，實直線是其幾何模型；把全體實二元序偶 (a_1, a_2) 的集合稱爲二維空間，實平面是其幾何模型.

車,小麥,牛奶和機器等的產量時,這些信息可以由每個國家用一個 n 元有序數組("n 數組")給出,其中第 i 個數字表示該國第 i 種產品的產量(在同一測量單位下),從而給出表 1.

表 1　年產量

	煤(噸)	鐵礦(噸)	鋼(噸)	…	小麥(噸)
國家 1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}
國家 2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
國家 k	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	…	a_{kn}

我們可以說國家 2 每年生產 a_{21}噸煤,a_{22}噸鐵礦,a_{23}噸鋼,…,a_{2n}噸小麥.

這些例子顯示將所有 m 個實數的有序序列全體統一考慮的方便之處,其中 m 是任一個固定自然數. 稱這樣的一個實數有序序列$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$爲一個 m **維向量**,稱數 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$爲向量 $\mathbf{P}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$的**分量**. 向量 $\mathbf{P}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$和 $\mathbf{Q}(b_1,b_2,\cdots,b_m)$是相等的當且僅當它們的所有對應的分量是相等的,即當且僅當對每個 i 有 $a_i=b_i$.

如果我們對兩個國家某幾種產品的總量感興趣,我們顯然可以將這兩個國家對應的分量相加以得到它,這裏總量是指年產量,因此,如果國家 1 和國家 2 的 m 種商品的產量表示成向量 $\mathbf{P}_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1m})$和 $\mathbf{P}_2(a_{21},$

$a_{22},\cdots,a_{2m}$),那麽總的産品量可以表示成向量

$$\mathbf{Q}(a_{11}+a_{21},a_{12}+a_{22},\cdots,a_{1m}+a_{2m}).$$

如果一個國家的産品量表示成 $\mathbf{P}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,並且每種商品産量增加了一個係數 k,則新的産量可以表示成向量

$$\mathbf{Q}=k\mathbf{P}=k(a_1,a_2,\cdots,a_m)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_m).$$

上面我們給出的定義是三維空間向量運算的推廣.當三維空間的概念推廣到 m 個實數的序列的集合的時候,我們得到下面一些重要定義:

定義 稱所有的由實分量組成的 m 維向量 $\mathbf{P}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$的集合爲 m 維空間,記作 $\mathbf{P}(m)$,兩個向量 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的和是一個向量 $\mathbf{R}$,它的分量等於 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的相應分量的和. 一個數 k 和一個向量 $\mathbf{P}$ 的乘積是一個向量,它的分量等於 k 乘以 $\mathbf{P}$ 的相應的分量.零向量的所有分量都是 0.

2. 線性相關和線性無關

對於向量 $\mathbf{P}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$與向量 $\mathbf{Q}(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,如果存在一個數 k 使得 $\mathbf{P}=k\mathbf{Q}$,即 $a_1=kb_1,a_2=kb_2,\cdots,a_m=kb_m$,則稱向量 $\mathbf{P}$ 與 $\mathbf{Q}$ 是成比例的.

兩個向量成比例的概念的推廣是向量線性組合的概念. 稱向量 $\mathbf{P}$ 是向量 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_s$ 的一個線性組合,

如果存在實數$l_1,l_2,\cdots,l_s$使得

$$\mathbf{P}=l_1\mathbf{P}_1+l_2\mathbf{P}_2+\cdots+l_s\mathbf{P}_s,$$

其中向量$\mathbf{P}$的第i個分量$(i=1,2,\cdots,m)$是向量$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_s$中每個向量的第$i$個分量乘積形式的和，即$\mathbf{P}$的第$i$個分量爲$\sum_{j=1}^{s}l_ja_{ji}$. 所以，如果對於向量$\mathbf{P}_1(a_{11},a_{12})$，$\mathbf{P}_2(a_{21},a_{22})$，$\mathbf{P}_3(a_{31},a_{32})$，有$\mathbf{P}=l_1\mathbf{P}_1+l_2\mathbf{P}_2+l_3\mathbf{P}_3$，則有

$$\mathbf{P}=(l_1a_{11}+l_2a_{21}+l_3a_{31},l_1a_{12}+l_2a_{22}+l_3a_{32}).$$

對於一個向量組$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_r$，如果其中至少有一個向量是其餘向量的線性組合，就稱它們是**線性相關的**，這個定義等價於：

定義 **一個向量組是線性相關的，如果存在至少有一個不爲零的實數**$k_1,k_2,\cdots,k_r$，**使得**

$$k_1\mathbf{P}_1+k_2\mathbf{P}_2+\cdots+k_r\mathbf{P}_r=0.$$

定義 **一個向量組如果不是線性相關的，則稱爲線性無關的**.

如果向量$\mathbf{P}_0$是向量$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2,\cdots,\mathbf{P}_n$的一個線性組合，則稱$\mathbf{P}_0$關於$\{\mathbf{P}_j:j=1,2,\cdots,n\}$是**線性相關的**. 顯而易見，如果一個向量關於一個給定向量組中的一個子向量組是線性相關的，那麼它關於整個向量組必然是線性相關的，事實上，只需要在其餘的向量前取零係數即可.

更一般地，我們稱向量組$\{\mathbf{Q}_i: i=1,2,\cdots,s\}$關於向量組$\{\mathbf{P}_j: j=1,2,\cdots,n\}$是線性相關的，如果每個向量 $\mathbf{Q}_i$: $(i=1,2,\cdots,s)$關於向量組$\{\mathbf{P}_j: j=1,2,\cdots,n\}$是線性相關的.

3. 基

考慮空間 $\mathbf{P}(m)$上的向量

$$\begin{cases} \mathbf{i}_1(1,0,0,\cdots,0), \\ \mathbf{i}_2(0,1,0,\cdots,0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{i}_m(0,0,0,\cdots,1). \end{cases} \tag{1}$$

因爲 $k_1l_1+k_2l_2+\cdots+k_ml_m=0$ 僅當對每個 $k_i=0$ 時成立，所以這個向量組是線性無關的，而且，對於在空間 $\mathbf{P}(m)$中的任何一個向量 $\mathbf{P}(a_1,a_2,\cdots,a_m)$有

$$\mathbf{P}=a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+\cdots+a_m\mathbf{i}_m.$$

所以向量 $\mathbf{P}$ 關於向量組(1)是線性相關的. 稱這個向量組(1)爲空間 $\mathbf{P}(m)$的自然基.

可以證明，在空間 $\mathbf{P}(m)$中多於 m 個向量所構成的向量組是線性相關的. 因此，在二維空間中，如果有兩個向量 $\mathbf{P}_1$ 和 $\mathbf{P}_2$，它們由原點射出並且不共線(即兩個線性無關的向量)，那麼對於在這個空間中的任何第三個向量 $\mathbf{P}_0$ 必能表示成 $\mathbf{P}_1$ 和 $\mathbf{P}_2$ 的線性組合. 類似地，在 3 維

空間,如果有三個向量,它們都發自原點並且不共面(即這三個向量線性無關),則在這個空間中的任何第四個向量 $\mathbf{P}_0$ 必能表示成這三個向量的線性組合. 在圖 1 中,我們說明了向量 $\mathbf{P}_0$ 可以通過線性無關的向量 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$ 和 $\mathbf{P}_3$ 線性組合

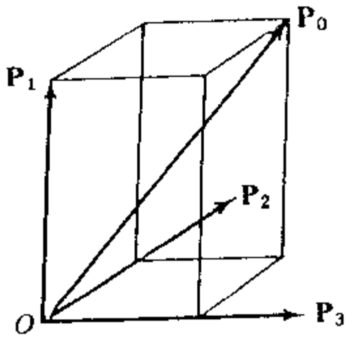

圖 1

$$\mathbf{P}_0=\mathbf{P}_1+\frac{1}{2}\mathbf{P}_2+\frac{2}{3}\mathbf{P}_3$$

來表示的情況.

在二維空間中,我們將第 1 節和第 2 節用過的 $\mathbf{P}_1(a_{11},a_{12}),\mathbf{P}_2(a_{21},a_{22})$,記爲,$\mathbf{P}_1(a_{11},a_{21}),\mathbf{P}_2(a_{12},a_{22})$,於是有行列式,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

這裏向量的分量構成了行列式的行. 可以證明,如果 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$ 是線性無關的,那麼這個行列式的值不爲零,反之亦然. 而且這個行列式的絶對值等於以 $\mathbf{P}_1$ 和 $\mathbf{P}_2$ 爲邊的平行四邊形的而積(見圖 2).

在三維空間,三個線性無關的向量

$$\mathbf{P}_1(a_{11},a_{21},a_{31}),\quad \mathbf{P}_2(a_{12},a_{22},a_{32}),\quad \mathbf{P}_3(a_{13},a_{23},a_{33})$$

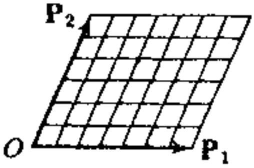

圖 2

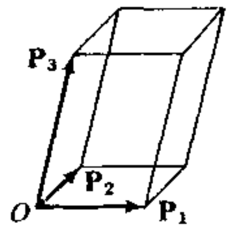

圖 3

決定一個平行六面體(見圖 3),此時行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的絕對值不爲零並且它等於這個平行六面體的體積.

同樣,在 m 維空間,如果給出 m 個線性無關的向量

$$\mathbf{P}_j(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{mj})\begin{cases} i=1,2,\cdots,m, \\ j=1,2,\cdots,m, \end{cases}$$

那麼正如高等代數課程中所證明的那樣,行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0.$$

現假設在 m 維空間中給出了 n 個任意的向量

$$\mathbf{P}_j(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{mj})\begin{cases}i=1,2,\cdots,m,\\ j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

我們將向量 $\mathbf{P}_j$ 的分量排列成一個 $m\times n$ 矩陣的行：

$$\begin{array}{cccccc}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & & \mathbf{P}_j & & \mathbf{P}_n\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

這個矩陣的行，作爲 m 向量，一般情況下可以是線性相關的，矩陣(2)中線性無關的行的最大數目被稱爲這個矩陣的秩. 我們稱這個數目爲該矩陣的行秩，以便區分這個矩陣中線性無關的列的最大數目，不管怎樣，對任何矩陣的列秩和行秩總是相等的.

將空間 $\mathbf{P}(m)$ 中任何極大線性無關組稱爲這個空間的一組基. 可以證明，一個給定空間的任何一組基都含有相同數目的向量，而且空間 $\mathbf{P}(m)$ 的基恰含有 m 個向量.