西北工业大学专著出版基金资助项目

非线性动力学系统的几何积分理论及应用

FEIXIANXING DONGLIXUE XITONG DE
JIHE JIFEN LILUN JI YINGYONG

张素英　邓子辰 著

西北工業大學出版社

西北工业大学专著出版基金资助项目

非线性动力学系统的几何积分理论及应用

张素英　邓子辰　著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书首先论述了广义 Hamilton 系统及广义 Hamilton 约束系统的几何积分方法，进而在较详细地介绍了李级数解法和李群李代数基本知识的基础上，又系统而深入地论述了更为广泛的一般形式的非线性动力学微分方程的李群积分方法。

本书可供高等院校应用数学专业、物理专业及力学专业的高年级学生、研究生、教师以及有关的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学系统的几何积分理论及应用/张素英，邓子辰著.
—西安：西北工业大学出版社，2004.12
ISBN 7-5612-1874-5

Ⅰ.非… Ⅱ.①张… ②邓… Ⅲ.非线性方程—动力系统(数学)—几何积分论 Ⅳ.O177.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 138123 号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路 127 号 **邮编：** 710072
电　　话： 029-88493844 88491757
网　　址： www.nwpup.com
印 刷 者： 陕西向阳印务有限公司
开　　本： 850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张： 9.125
字　　数： 222 千字
版　　次： 2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷
定　　价： 18.00 元

序

动力学系统存在于众多科学和工程领域，因此研究动力学系统，特别是研究非线性动力学系统的数学力学理论和计算方法已经受到数学、物理、力学乃至工程科学家的重视，成为当今世界上基础和应用基础研究的热门领域。

动力学系统保结构算法（几何积分方法）始于我国著名数学家冯康院士于上世纪 80 年代初创立的 Hamilton 系统辛几何算法，它已经发展成为包括经典 Hamilton 系统辛几何算法、无穷维 Hamilton 系统多辛几何算法和微分方程李群算法在内的一个重要的计算体系；著名力学家钟万勰院士也于上世纪 80 年代后期在计算结构力学和控制论的基础上，建立了一套 Hamilton 系统的辛几何算法及其时程精细积分方法，并已有相应的专著出版。

本书第一作者在攻读博士学位期间，与其导师（第二作者）一起对非线性动力学系统，包括非线性耗散与约束动力学方程的计算方法，进行了深入系统的研究，并发展和提出了若干有创造性的新型保结构算法，其中包括：拓展微分方程李群方法得到求解任意动力学方程的李级数方法；Poisson 流形上广义 Hamilton 系统的保结构算法；耗散广义 Hamilton 系统和广义 Hamilton 控制系统的李群积分方法；基于 Laplace 变换的数值反演方法；广义 Hamilton 约束系统的李群积分法；基于 Magnus 展开的求解非线性动力学方程的李群方法；基于 Fer 展开求解非线性动力学方程的超收敛积分公式，以及利用 Minkowski 空间的精细积分方法等。

本书是作者在其博士论文基础之上，经过系统全面的整理、扩

充和完善而形成的，它是在动力学系统计算方法及其数学理论方面的又一本具有重要理论意义和工程应用价值的学术专著；它的出版发行将会在推进动力系统研究，特别是非线性动力学方程计算方法研究方面发挥重要作用。

在此，向作者表示祝贺，并希望作者在非线性动力系统研究领域再创辉煌。

崔俊芝

2005 年 1 月 12 日

前　言

动力学系统是一个广泛的研究领域，它包含大量的物理系统、化学系统、生物系统及各种工程系统等。这些系统的表现形式虽然千差万别，但其运动规律却具有相似的数学模型。一般地，它们可以用常微分方程和偏微分方程的数学模型来描述。这些问题所属的物理学、力学和工程技术本身的特殊规律，常常会在问题的严格数学处理之前，提示求解问题的定性的思想和方法，促使具体问题的解决。尤其是，如果微分方程的几何性质代表了一个关键的物理解释，那么必须强调要保持微分方程的真解的几何性质，如渐进性质、不变量、辛性、李对称性等等。具有足够小的误差，且能保持系统的重要定性性质的算法就是所谓的几何积分方法。

当今时代，科学计算已是独立于理论研究、实验研究的一种基本的科学活动，一般不再仅仅把它看做理论研究、实验研究的辅助手段。因此，作为独立的一种研究手段，从计算力学的角度讲，动力学方程的数值计算，必然需要利用其定性知识，反映它的几何性质，有时保持动力学方程的不变量尤其重要。冯康院士和他领导的课题组深入、系统地研究了 Hamilton 系统的辛几何算法，开辟了一个理应受到重视但却长期被忽视的研究领域。Hamilton 体系的研究对象是保守系统，而耗散系统广泛存在于自然界和日常生活中，近年来随着研究的深入，如何处理耗散系统问题已成为学术界关注的焦点。

本书基于李群李代数的方法讨论了广义 Hamilton 系统及带耗散的广义 Hamilton 系统的几何积分方法。耗散动力学系统是

一个广泛的研究领域，有时，很难把所研究的系统表示为一个耗散Hamilton受控系统，即存在所谓广义Hamilton实现问题。因此我们进一步研究了非线性动力学一般方程的几何积分方法。根据算子半群理论，动力学微分方程系统都可以写成线性映射作用的模型形式。另一方面，任意非线性动力学方程均可以转化为Minkowski空间上的李型方程，而且自然呈现出了原非线性系统在Minkowski空间的内在对称群性质。在算子理论范围，或把动力学系统的构形空间拓展到Minkowski空间，使得原动力学方程可以表示为一个李型方程，基于线性微分方程的几何积分方法，我们从两个不同的角度分别讨论了一般非线性动力学系统的几何积分方法。

本书的内容主要取材于作者就读西北工业大学时的博士学位论文。为了使书中内容严密、有据，我们还介绍了散见于国内外专著和期刊的某些基本结果及有关的基础知识。

全书共分九章。第一章绪论主要介绍了微分方程的几何积分方法的思想。第二章讨论了非线性动力学系统的李级数解法、基于Laplace逆变换及Laplace变换数值反演等一系列新的数值方法。第三、四章分别讨论了广义Hamilton系统及耗散广义Hamilton约束系统的几何积分方法。第五、六章分别介绍了流形及李群上的微分方程及其解法。第七、八章讨论了一般非线性动力学系统的几何积分方法。第九章讨论了非线性动力学方程的精细积分方法。

在本书相关内容的研究和全书写作过程中，得到大连理工大学钟万勰院士、中国科学院数学与系统科学研究院崔俊芝院士和洪佳林教授的鼓励和支持。晨兴数学中心举办的“动力系统保结构算法”研讨班的学习与交流对书稿的完成有很大的帮助。同时，研究和写作工作长期得到国家自然科学基金的资助（编号为19872057，10372084，10472059），还得到教育部新世纪优秀人才基

金，霍英东青年教师基金（编号为71005），高校博士点专项基金（编号为20010699016），航空科学基金（编号为00B53006），陕西省自然科学基金（编号为2002A17）及西北工业大学博士论文创新基金的资助；本书的出版得到西北工业大学出版基金的资助。作者在此一并表示衷心感谢。

由于作者学识的限制，本书难免存在不妥乃至错误的地方，敬请读者指正。

作 者

2004年10月

目　录

第一章　绪论 ………………………………………………… 1

1.1　引言 ………………………………………………… 1
1.2　常微分方程的几何积分方法及其研究现状 ………… 3
1.3　研究背景与意义 …………………………………… 10
1.4　主要内容 …………………………………………… 13
参考文献 ……………………………………………… 15

第二章　非线性动力学方程的新解法 ………………… 19

2.1　引言 ………………………………………………… 19
2.2　李级数解法 ………………………………………… 20
2.2.1　基本方程 ………………………………………… 20
2.2.2　常微分方程组初值问题的李级数解 …………… 22
2.2.3　李级数数值方法 ………………………………… 23
2.2.4　N 阶常微分方程的解法 ……………………… 25
2.2.5　算例 ……………………………………………… 26
2.3　基于 Laplace 逆变换数值求解非线性动力学方程的新方法 ……… 28
2.3.1　数学理论 ………………………………………… 28
2.3.2　数值方法 ………………………………………… 30
2.3.3　特例——线性常微分方程的求解 ……………… 31

2.3.4 算例 …… 32
2.4 基于 Laplace 数值反演的新方法 …… 34
2.4.1 关于函数的 Laplace 变换的数值反演方法 …… 34
2.4.2 基于 Laplace 变换数值反演的非线性动力学方程的新算法 …… 35
2.4.3 算例 …… 38
2.5 本章小结 …… 40
参考文献 …… 41

第三章 广义 Hamilton 系统的保结构算法 …… 42

3.1 引言 …… 42
3.2 Poisson 流形上的广义 Hamilton 系统的数值解法 …… 44
3.2.1 Poisson 流形及广义 Hamilton 系统的基本理论 …… 44
3.2.2 广义 Hamilton 系统的保结构算法 …… 46
3.2.3 广义 Hamilton 控制系统中算法的应用 …… 48
3.2.4 算例 …… 49
3.3 Hamilton 系统的辛算法 …… 50
3.3.1 Hamilton 系统 …… 50
3.3.2 Hamilton 系统的辛算法 …… 52
3.3.3 共轭算法 …… 53
3.3.4 合成算法 …… 54
3.3.5 分裂合成方法 …… 55
3.4 BCH 公式 …… 56
3.4.1 指数映射的导数及其逆映射 …… 56
3.4.2 BCH 公式 …… 58

3.4.3 对称合成高阶算法 …… 61
3.5 耗散广义 Hamilton 自治系统的数值解法 …… 67
3.5.1 基本方程 …… 67
3.5.2 数值积分方法 …… 68
3.5.3 数值方法在广义 Hamilton 控制系统的应用 …… 70
3.5.4 算例 …… 71
3.6 广义 Hamilton(控制)系统的离散梯度积分法 …… 72
3.6.1 系统模型 …… 72
3.6.2 离散梯度及离散梯度积分法 …… 73
3.6.3 算例 …… 77
3.7 非自治耗散广义 Hamilton 系统的解法 …… 79
3.7.1 广义 Hamilton 系统的 Fer 展开方法 …… 79
3.7.2 广义 Hamilton 系统的 Magnus 级数方法 …… 82
3.7.3 算例 …… 86
3.8 本章小结 …… 88
参考文献 …… 88

第四章 耗散广义 Hamilton 约束系统的李群积分法 …… 92

4.1 引言 …… 92
4.2 Hamilton 约束系统的辛积分 …… 93
4.2.1 Hamilton 约束系统 …… 93
4.2.2 Hamilton 约束系统的辛积分 …… 96
4.2.3 Hamilton 约束系统的高阶辛积分 …… 101
4.2.4 化为无约束系统的辛积分方法 …… 102
4.3 广义 Hamilton 约束系统及其变形的无约束系统 …… 104

4.4 广义 Hamilton 约束系统的李群积分法 ………… 107
4.4.1 变形所得无约束广义 Hamilton 系统的李群积分法 ………… 107
4.4.2 约束不变量的稳定性 ………… 108
4.5 用投影技术求耗散广义 Hamilton 约束系统的李群积分 ………… 109
4.5.1 变约束方程为无约束方程 ………… 109
4.5.2 用投影技术求广义 Hamilton 约束系统的李群积分 ………… 110
4.5.3 直接构造广义 Hamilton 约束系统李群积分的投影方法 ………… 112
4.6 算例 ………… 112
4.7 本章小结 ………… 115
参考文献 ………… 115

第五章 流形上微分方程的解法及李群理论 ………… 117

5.1 引言 ………… 117
5.2 流形 ………… 119
5.3 李群 ………… 122
5.4 流形上的切空间与向量场 ………… 130
5.5 流形上的微分方程及其解法 ………… 144
5.5.1 流形上的微分方程 ………… 144
5.5.2 投影方法 ………… 145
5.5.3 流形上基于局部坐标的数值方法 ………… 146
5.6 李代数 ………… 147
5.7 本章小结 ………… 161
参考文献 ………… 161

第六章 李群上微分方程的积分方法……………………… 162

6.1 引言 …………………………………………… 162
6.2 流形上微分方程的 RKMK 方法 ……………… 165
6.3 Crouch-Grossman 方法 ………………………… 166
6.4 基于第二类典则坐标的积分方法 ……………… 168
6.5 Magnus 展开方法 ……………………………… 169
6.5.1 Magnus 展开式 ……………………………… 169
6.5.2 Magnus 级数展开与平面双枝树的关系 …… 173
6.6 Fer 展开式 ……………………………………… 176
6.7 本章小结 ………………………………………… 180
参考文献…………………………………………… 180

第七章 一般非线性动力学方程的几何积分方法…………… 182

7.1 引言 …………………………………………… 182
7.2 一般非线性动力学系统的增广动力学系统形式及其锥结构 …………………………………… 186
7.2.1 动力学系统的增广动力学系统形式 ………… 186
7.2.2 洛仑兹群及其李代数的性质 ………………… 188
7.3 基于 Cayley 变换构造保群格式………………… 189
7.4 基于 Pade 逼近构造保群格式 ………………… 191
7.5 部分旋转矢量场 ………………………………… 195
7.6 S^{n-1} 上的旋转矢量场 ……………………… 198
7.7 基于 Magnus 展开式的近似方法 ……………… 199
7.7.1 线性常微分方程的求解方法 ………………… 199
7.7.2 在 Minkowski 空间构造非线性微分方程的近似解 ………………………………………… 203

7.7.3 一个简单易行的四阶积分法 …………………… 212
7.7.4 基于解算子的 Magnus 展开式构造非线性微分方程的近似解法 …………………………………… 218
7.7.5 基于 Magnus 展开式的数值方法的收敛性分析 ………………………………………………… 229
7.8 基于 Fer 展开式构造非线性动力学方程的近似解法 ………………………………………………… 231
7.8.1 在 Minkowski 空间进行 Fer 展开 …………… 231
7.8.2 基于 Magnus 展开式的 Fer 型近似解 ……… 233
7.8.3 关于时间对称的 Fer 型积分格式 …………… 234
7.8.4 动力学方程的解算子的 Fer 展开式 ………… 235
7.8.5 基于 Magnus 展开式的另一类 Fer 型近似格式 ………………………………………………… 236
7.8.6 基于 Fer 展开的数值方法的收敛性分析 …… 237
7.8.7 算例 …………………………………………… 238
7.9 本章小结 ………………………………………… 240
参考文献……………………………………………… 241

第八章 基于 RKMK 方法构造一般非线性动力学方程的数值解法 …………………………………… 245

8.1 引言 …………………………………………… 245
8.2 李群上微分方程的 RKMK 方法 ……………… 246
8.3 一般非线性动力学系统的李群算法 …………… 248
8.4 算例 …………………………………………… 250
8.5 几何积分方法的向后误差分析性质 …………… 253
8.5.1 向后误差分析的基本概念 ………………… 253
8.5.2 几何积分方法的向后误差分析性质 ……… 255

8.5.3 向后误差分析的截断误差 …………………… 255
8.6 本章小结 ………………………………………… 257
参考文献……………………………………………… 257

第九章 非线性动力学方程的精细积分法…………………… 260

9.1 引言 ……………………………………………… 260
9.2 非线性动力学方程在 Minkowski 空间的精细积分方法 …………………………………………… 261
9.3 增维的精细积分法 ……………………………… 263
9.4 对称合成方法 …………………………………… 264
9.5 精细 Runge-Kutta 方法 ………………………… 265
9.6 算例 ……………………………………………… 267
9.7 本章小结 ………………………………………… 271

参考文献……………………………………………… 274

第一章　绪　论

1.1　引　言

用数学方法研究力学与工程技术中的具体问题，是力学研究工作者面临的重要任务之一。首先，依据由观察和实验所确立的基本规律，摈弃次要属性，借助数学工具建立有关物理量之间相互制约的运动关系，这种数学关系或具体算法称为数学模型。建立数学模型的目的是运用数学方法对问题进行求解。因此，更为重要的是研究数学模型的求解方法，给出未知物理量的解析表示或数值结果；研究它的解的一般性质，解释物理过程的关联与演化。动力学系统是一个广泛的研究领域，它包含大量的物理系统、化学系统、生物系统，以及各种工程系统等。这些系统的表现形式虽然千差万别，但其运动规律却具有相似的数学模型。一般地，动力学系统可以用常微分方程和偏微分方程的数学模型来描述。例如，自动控制系统的运行、电力系统的运行、飞行器的轨道控制、化学反应过程、生态平衡问题等，其数学模型都是常微分方程组初值问题和微分代数方程。许多偏微分方程通过空间离散化也可化为常微分方程的初值问题。本书主要是针对常微分方程初值问题和微分代数方程描述的动力学系统来讨论其数值解法。

传统上，人们从两个极端不同的出发点来理解和掌握常微分方程问题。纯数学家对问题认识深刻，推导严密，并采用大范围整体化的定性知识；而数值分析家通过构造富有技巧的算法，以获得只有很小的误差的离散解，他们一般不考虑整体的定性性质。孰优

孰劣?这要视具体问题具体分析。如果问到:“局部误差多大?”这个问题大可以由传统的数值分析方法来解决。事实上,真实的物理过程都不是极端的。在数学物理问题的研究中,问题所属的物理学、力学和工程技术本身的特殊规律,常常会在问题进行严格数学处理之前,提示求解问题定性的思想和方法,并促使具体问题的解决。本书强调应将微分方程的几何性质等定性信息与数值计算有机地结合起来,进而处理实际问题。

大部分在物理学中显示巨大威力的新的数学思想均来自于几何与分析的交叉。我们可以简单地回顾微分方程与几何学不可分割的历史渊源。18 世纪以前的物理学家和自然哲学家,如 Copernics,Galileo,Kepler,Newton 等都对几何学非常熟悉,他们常用几何概念来表达其物理思想。在 19 世纪,Descartes 对 Euclid 几何引入坐标后,将几何学的研究看成是代数与分析的应用,这引起了几何学的革命,促进了在几何学中各种分析工具的应用。与此同时,在物理学中利用坐标概念将自然定律表示成微分方程,促进了物理学的发展。在此阶段,多数物理学家主要注意对物理体系局域运动性质的探讨,对运动实体的内部对称性及大范围整体性质往往注意不足。拓扑学与微分几何在物理学的重要性常被忽视,甚至任何物理现象都在空间发生,任何物理理论都依赖于空间和时间的基本几何特性这样明显的事实也往往被忽视。19 世纪中叶,Maxwell 从实验观察总结出电磁现象的运动方程,注意到 Maxwell 方程组的共性不变性。Lorentz,Minkowski 之后,直到 20 世纪初,Einstein 提出了狭义相对论,人们才进一步深入认识到了时空的基本几何特性的重要性。这时主要应用的数学工具是微分方程及群论分析等。长期以来,微分方程在自然现象的数学研究中起到了决定性的作用。人们充分认识到,通过研究微分方程的几何性质,可以获知它的真解的关键性的定性特征。其中最重要的例子是 Alexander Rowan Hamilton 提出的力学定理,它使人们可以用