小学数学
教材教法述评

夏有霹 编著

人民教育出版社

小学数学教材教法述评

夏有霖　编著

人民教育出版社

小学数学教材教法述评

夏有霹　编著

*

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 9.125　字数 187,000

1989年 2 月第 1 版　1989年 2 月第 1 次印刷

印数　1— 1,830

ISBN 7-107-10155-2

G·1026　定价 3.35 元

说　明

一、本书是专为具有初中文化水平的以及新参加到教师队伍中来的小学数学教师同志们写的，也可以供中等师范学校在校学生以及关心小学数学教学的同志们参考。

二、本书内容包括两大部分：一部分是与小学数学教学内容有关的较为系统的数学知识，大体相当于中等师范学校讲授的小学数学基础理论，只是在讲解上更为浅显一些，便于文化水平稍低的同志们阅读，其中有些内容取材于作者等人编写的卫星电视教育小学教师培训教材算术一书；另一部分是讲述在小学数学中这些内容是如何进行教学的，从数学知识的内在联系，结合小学生的实际，指出一些教学途径，接触到当前看法不太一致的问题，也谈到过去的一些历史情况。为了便于读者阅读，前一部分用宋体字排印，作为理论阐述；后一部分用楷体字排印，作为个人的评述。

三、希望看过本书的同志，对于小学数学的教学内容能有进一步的认识；在教学途径上，包括各种不同看法，能有所了解；加上自己的教学经验和教学才能，对于小学数学教学必然会有自己的看法，从而能够根据自己的教学实际，采取较好的教学方法，为提高小学数学的教学质量，作出应有的贡献。这正是写作本书的一个重要心愿。

四、本书属于个人经验小结，书中讲的当然只是个人的看法，只能供作参考。如有不妥，敬请批评指正。

作　者

1987 年 4 月

目　录

第一章 整 数

一 数和运算

1.1 数 数是由于数(shǔ)物体的需要才产生的。在人类历史上，最初并没有数的概念。后来，由于人们在采集果实和狩猎的劳动中，常常需要判断获得的果实够不够分，劳动工具够不够用，逐渐形成了“多”或“少”的概念。再往后，随着生产的发展，人们需要对各种物体进行数量的比较，才开始有了数的概念。从开始有数的概念，直到把数从具体事物中抽象出来，并且用数来计数物体，人类的历史就发展到了一个新的阶段。这时候，无论是对于猎获物的计数，还是对于劳动工具的计数，一开始要用到的是计数物体的个数，即一、二、三、四、五、……这些数，我们称之为**自然数**。以后由于计量的需要，自然数不够用了，于是产生了分数。分数产生比较早。在我国，距今大约两千年就已经成书的重要的数学专门著作《九章算术》中，就系统地讲述了分数和分数的四则运算。由于分数计算比较复杂，特别是当分母相当大时，计算就变得很繁，到了商业经济出现的时候，计算日趋繁杂，于是又有了小数。小数是十进分数，是以 10 的幂作分母的分数。正因为它是十进的，所以它的书写和计算能与整数的书写和计算基本一致。这是它的最大的优点。随后，依次出现了无理数、负数、虚数。零，一开始是用来占位的，即在用位值原则记数的时候，遇到哪一位上没有数，就在那一位上写零。这时候，零只是一个符号。零，作为一个数是比较晚的，是由于研究负数的需要才把它看作一个数。

以上所讲的自然数，又称为正整数。零，也是整数，但没有正负。所以，自然数和零又称为非负整数。非负整数加上正分数（包括有限小数、循环小数），就称为非负有理数。非负有理数加上负有理数，就称为有理数。有理数加上无理数（无限不循环小数），就称为实数。实数加上虚数，就称为复数。这个系统，又称为数系。可以列成下表：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{自然数（正整数）}\\ \text{零（没有正负）}\end{array}\right\}\text{非负整数}\\ \text{正分数（有限小数、循环小数）}\end{array}\right\}\text{非负有理数}\\ \text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{array}\right\}\text{实数}\\ \text{虚数}\end{array}\right\}\text{复数}$$

1.2　运算　又称为计算，有时又称为演算。运算方法有加法、减法、乘法、除法、乘方、开方。前面四种运算，合称为四则运算；加上后面两种，有时又称为六则运算。其中，加法、减法，又称为第一级运算；乘法、除法，又称为第二级运算；乘方、开方，又称为第三级运算。

在数的某一个范围（或称数集）里，一种运算可以施行（又称为实行或实施），指的是施行这种运算的结果，所得的数仍属于这个范围。比如说，任意两个自然数相加，所得的结果仍然是自然数，就说加法运算在自然数范围（或称自然数集）里总可以施行。对于这种情况，有时又说成“自然数集对于加法运算是封闭的”。由此可以看出，在中、小学数学中，或者说在初等数学中，数的概念是从自然数开始的。在自然数范围里，加法和乘法总可以施行，减法只有在被减数大于减数的情况下才能施行，除法只有在除数能整除①被除数的情况下才能施行。

---

① 整除是在整数范围内讨论的概念，即被除数、除数都是整数（除数不能为零），所得的商也是整数，余数是零（或者说没有余数）。

数的第一次扩充是引进了数“零”，即在自然数集中添加了一个数“零”，自然数的范围扩大了。这时候，所有自然数加上数“零”的全体，组成了扩大的自然数集（也可以称做非负整数集）。在扩大的自然数集里，减法在被减数等于减数的情况下也能施行。对于除法来说，数“零”不能做除数。以后，不管在数的什么范围里，数“零”永远不能做除数。

数的第二次扩充是引进了正分数，即在扩大的自然数集中添加了正分数，组成了非负有理数集。这时候，除法运算总可以施行，但不许用零做除数。

数的第三次扩充是引进了负有理数，即在非负有理数集中添加了负有理数，组成了有理数集。这时候，加、减、乘、除（除数不能是零）四种运算，以及指数是正整数的乘方运算，都可以施行。

数的第四次扩充是引进了无理数（正的或负的），即在有理数集中添加了无理数，组成了实数集。在实数集中，开方运算不是总能施行的，即当开偶次方时，被开方数不能是负数。

数的第五次扩充是引进了虚数，即在实数集中添加了虚数，组成了复数集。这时候，负数开偶次方的运算也能施行了，并且开几次方就有几个方根。

在历史上，曾把代数理解为解方程。从解方程这一角度看，数的概念发展到复数集，就没有再扩充的必要了，因为任何代数方程在复数集中总有解，而且几次方程就有几个根。

综上所述，数的发生和发展，一方面是随着实践的需要而发生、发展，另一方面也有数学内部的原因，即随着数学本身发展的需要而发展。

小学数学中关于数和运算的教学 解放以前的小学算术，一般都是讲整数、分数、小数。（因为算术中不讲负数，所以在算术里就

把非负整数简称为整数，正分数简称为分数，正小数简称为小数。所以非负有理数又称为算术数。将来在引进负数以后，再补充说明以往学过的数是正数。本书也是按照这个习惯。本章标题“整数”就是“非负整数”的简称。这里讲到的整数、分数、小数，指的是非负有理数。以下同此。）解放以后，五十年代的小学算术，主要是讲整数，分数、小数讲得很少。到五十年代末六十年代初，由于初中不再学习算术，小学算术又讲完整数、分数、小数。从数的系统说，就是讲到非负有理数。运算，小学算术是讲加、减、乘、除四种运算，个别地方提到一点平方、立方（例如：正方形的面积是边长的平方，正方体的体积是棱长的立方；圆形的面积是半径的平方乘π等）。在小学数学中讲这些内容是不是合适呢？从运算与数两方面来看，讲到非负有理数，加法、乘法、除法（除数不能是零），都可以施行；只有减法，必须在被减数不小于减数的情况下才能施行。对于减法运算的这个限制，一方面很容易看得出；另一方面在遇到较小的数减较大的数时，可以用较大的数减较小的数来代替。所以，不讲负数对于减法运算并无多大妨碍。从实际应用方面来看，大量用到的是非负有理数和非负有理数的四则运算，即使遇到有关负的概念的时候，也可以明确指出它的含义，如差多少，少多少，而不采用负数。所以，在小学阶段讲到非负有理数是完全可以的。

从以往的情况看，五十年代末六十年代初曾经有人想把负数引进到小学算术中，并且在一开始就既讲正数，也讲负数。当时有的试验课本就是这样安排的：在一年级的开始，就有$3-2=1$，$2-3=-1$。这样讲，从概念方面看，也还可以理解，如说3减2剩1，2减3少1；但是在计算方面，难点就集中了。因而在教学上就产生了一定的困难。所以后来没有推广开来。1978年制定的《全日制十年制学校小学数学教学大纲（试行草案）》中，又一次引进了负数。这一次是把负数安排在整个小学数学教学内容的最后。

当时这样安排的目的是：让学生在小学初步接触到一点负数，到中学以后再系统学习负数，有个循环认识的机会，以减少学生在中学开始学习的困难。后来，虽然有的学校教学过这部分内容，学生也可以接受，但由于考虑到全国各地发展不平衡，有的地区学生负担过重，经过研究，又把这部分内容删去了。

二　整数的意义和读法、记法

1.3　自然数　前面已经说过，在数(shǔ)物体个数的时候，得到的一、二、三、四、……我们称之为自然数。自然数又称为整数。

自然数有两重意义。一是表示数量的意义，即被数的物体有“多少个”。这种用来表示事物数量的自然数，称为**基数**。二是表示次序的意义，即最后被数到的物体是“第几个”。用来表示事物次序的自然数，称为**序数**。正是因为自然数有这样两方面的意义，所以自然数的理论，最常用的有两种，一是基数的理论，一是序数的理论。

在基数的理论基础中有一个原始的概念，就是“物体的集合”。为了说明基数的理论，先来说一说本书将要用得着的集合的有关概念。

把具有某种属性的一些单独的个体看作一个整体，我们就说这些物体组成一个集合(有时简称集)，其中每个单独个体就称为该集合的元素。例如：一个班的所有学生可以组成一个集合，其中每个学生就是这个班学生集合的元素；一些学习用具，钢笔、铅笔、橡皮、三角板，可以组成一个集合，每一件用具就是这些学习用具集合的元素。一本书也可以组成一个集合，这本书就是该集合唯一的一个元素。包含有限个元素的集合，叫做有限集；包含无限个元素的集合，叫做无限集。

集合是数学中的原始概念之一，只作如上的描述，不再用更原始的概念来给它下定义，但对于一个给定的集合，以下两点必须明确：一是集合中的元素必须是确定的，任何一个对象，或者是这个集合的元素，或者不是这个集合的元素，否则，就不能成为一个集合；二是集合中的元素必须是不同的，同一个对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素。

如果有 A、B 两个集合，集合 A 里的每个元素，都可以在集合 B 里找到唯一的一个元素和它相对应；反过来，集合 B 里的每个元素，也都可以在集合 A 里找到唯一的一个元素和它相对应，我们就说这两个集合里的元素可以一一对应。这样的A、B两个集合叫做等价(等势)集合。例如，一个人左手手指的集合和右手手指的集合就是等价集合；教室里，如果每个学生一张课桌，不多也不少，那么教室里学生的集合和课桌的集合也是等价集合。同样，一本书和一支铅笔，如果分别都作为一个集合，那么这两个集合也是等价集合。在判定两个集合是不是等价集合时，不一定要知道每个集合里有多少个元素，只要能够确定这两个集合里的元素能够一一对应就可以了。

如果集合 A 和集合 B 是等价的，集合 B 和集合 C 是等价的，那么很明显，集合 A 和集合 C 也是等价的。有了这个性质，就可以在一类等价集合里任意选取一个集合作为标准集合，用它来作为这一类等价集合的代表。例如，用一只手的五个手指组成的集合作为标准集合，那么，五头牛，五只羊，五本书，五支笔所组成的一类等价集合，就都可以用五个手指组成的集合来表示。由此可以看出，一切等价集合有一个重要的共同特征就是它们的元素的个数相同。到此，对自然数可以作如下定义：

自然数是一切等价集合的共同特征的标记。

自然数的这个定义，基本上反映了自然数概念形成的历史过

程，同我们通常所说的“自然数是表示物体的个数”是一致的。

序数的理论是将自然数的一些基本性质抽象为公理，用公理化形式来给自然数下定义。这里应用了一个不定义的概念“直接后继”(有时简称“后继”，通常用“′”表示，例如5是4的后继数，写作 $4'=5$)。序数理论所采用的公理，最初是由意大利数学家皮亚诺(Peano，1858—1932)提出的，所以又称皮亚诺公理，包括以下五条：

(1) “1”是自然数；

(2) “1”不是任何自然数的后继数；

(3) 每一个自然数 a 都只有一个后继数 a'；

(4) 如果自然数 a 与 b 的后继数相等，即 $a'=b'$，那么 $a=b$；

(5) 任意关于自然数的命题，如果证明了它对自然数1是对的，又假定它对自然数 n 为真时，可以证明它对 n' 也真，那么这个命题对所有自然数都真。

最后一条是数学归纳法的基础。

1.4 自然数列 从基数的理论看，由一个元素组成的集合，它的基数是1；由两个元素组成的集合，它的基数是2；由三个元素组成的集合，它的基数是3；……从序数的理论看，1是自然数，但不是任何自然数的后继数；1的后继数是2；2的后继数是3；……因此，无论是按照基数的理论，还是按照序数的理论，都可以知道1是最先出现的自然数；从1开始，依次出现的自然数是：

1，2，3，4，5，……

这样依次排列着的全体自然数，叫做自然数列。

从自然数列的构成，可以看出自然数列有如下的三条性质：

(1) 自然数列是有始的：1是自然数列最前面的一个数；

(2) 自然数列是有序的：自然数列每一个数的后面都有一个而且只有一个后继数；

(3) 自然数列是无限的：在自然数列里不存在"最后"的数。

自然数列反映了自然数的两重意义。例如：自然数1，可以表示一个(事物的数量)，也可以表示第一(事物出现的次序)；同样，自然数 2，可以表示两个，也可以表示第二；自然数 3，可以表示三个，也可以表示第三；……

根据自然数列，就可以对自然数作大小的比较：

排在自然数列后面的数，比它前面任何一个数都大；排在自然数列前面的数，比它后面任何一个数都小。

1 是自然数中最小的一个，可以看作自然数的单位，有时也称单位 1。

按照自然数大小的比较，很明显可以得出如下的一些性质(通常称为**自然数的基本顺序律**)：

(1) 次序的全序性：对于任意两个自然数 a 和 b，下面三个关系中必有一个成立，而且只有一个成立：

$$a=b, \quad a>b, \quad a<b。$$

(2) 相等的自反性：$a=a$。

(3) 相等的对称性：如果 $a=b$，那么 $b=a$。

(4) 相等的传递性：如果 $a=b, b=c$，那么 $a=c$。

(5) 不等的反对称性：如果 $a>b$，那么 $b<a$；

如果 $a<b$，那么 $b>a$。

(6) 不等的传递性：如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$；

如果 $a<b, b<c$，那么 $a<c$。

1.5 计数 有了自然数列以后，计数的过程就是把要计数的对象，跟自然数列里的每一个自然数相对应。例如，要计数教室里有多少张课桌，可以把第一张课桌跟自然数列里的自然数 1 相对应，把第二张课桌跟自然数列里的自然数 2 相对应，把第三张课桌跟自然数列里的自然数 3 相对应，……照这样数下去，使得每一张

课桌依次跟自然数列里的某一个自然数相对应；如果数到最后一张课桌所对应的自然数是40，那么教室里的课桌和1到40这些自然数就成了一一对应。因而我们可以说，教室里有40张课桌（或者说，哪一张课桌跟哪一个自然数相对应，就是第几张）。

从计数经验中，我们知道：在计数课桌的过程中，无论是按横排去计数，还是按竖行去计数，或者是按别的什么顺序去计数，只要没有遗漏，没有重复，计数的结果总是唯一的。这就是说计数的结果与计数的顺序无关。

计数的这个特性，即计数的结果与计数的顺序无关，称为**计数公理**。

1.6 零 从前面所说的自然数的意义看，如果按照基数的理论，自然数是对物体集合计量的结果，或者说，自然数是表示物体集合里的元素的个数。这样看来，似乎一个集合里至少得有一个元素。但是在实践中，经常遇到没有物体的情况，例如教室里一个学生也没有，书架上一本书也没有。这时候，如果把教室里的学生或者书架上的书分别都作为集合看待，那么这两个集合就都成了一个元素也没有的集合。我们把这种集合叫做空集合。空集合的标记是什么，或者说，用什么来表示这种集合的共同特征呢？数学中引进一个新的数“零”，用它来表示空集合的基数。因此，零是空集合的标记，它表示集合中一个元素也没有。所以把“零”作为一个数，通常说它表示“没有”。

“零”作为一个单独的数，不仅可以表示没有，还可以用它来编号，或者用它作为一种事物中间的某个界限。例如，我们日常用的摄氏温度计，把水在标准大气压下结冰的温度定为零摄氏度，比它高的温度是零上温度，比它低的温度是零下温度。数学中引进负数以后，负数与正数的分界就用“零”表示，比零大的数为正数，比零小的数为负数。零没有正负。在数轴上，用“零”表示原点，按通常