初等数学疑难问题讲解

排列组合及其应用

陈志增 王振禄

LIEZUHEJIQIYINGYONG

内蒙古人民出版社

初等数学疑难问题讲解

排列组合及其应用

陈志增　王振禄

内蒙古人民出版社

1982年8月1日

初等数学疑难问题讲解
排列组合及其应用
陈志增　王振禄
*
内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行
通辽教育印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：6.375 字数：131千
1982年9月第一版　1983年4月第1次印刷
印数：1—7,000册
统一书号：7089·308 每册：0.63元

出版说明

《初等数学疑难问题讲解丛书》是为自学数学的广大社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的。它是就疑难问题较多的篇章中撰写为：《曲线的切线和切线方程》、《空间直线·平面·多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和差积商的周期》、《排列组合及其应用》、《解题分析与解题技巧》、《容易错的概念·容易错的方法》等书组成。

这套丛书各册的共同特点是：对有关基础知识和基本训练方面的疑难问题讲解的比较细致通俗，易读易懂；对所用例题都有分析，通过分析疏通了思路，抓住了解题的关键，对综合题采用了不同知识的多种解法；同时，适当地注意了知识的准确性和语言的趣味性。

因此，这套丛书，可供为广大社会青年自学数学的辅导用书，也可作为在校中学生的课外辅助读物，对于中学数学教师也是较好的教学参考资料。

内蒙古人民出版社

一九八二年九月一日

前　言

排列和组合是初等数学中一段独特的内容，是很重要的一部分基础知识。排列组合又是一个源远流长的古老数学问题，在我国远古时代，就流传有伏羲氏制“八卦”，而八卦就是一种重复排列。北宋时期我国著名科学家沈括，在他的著作《梦溪笔谈》中，也曾经使用排列组合的方法，计算了围棋棋局总数的问题。排列组合在现代又十分活跃而正在蓬勃发展着，当前它已发展成为现代数学的一个重要分支——组合论。在组合论中，古典排列组合虽然不过是其中很少的一部分，但是组合论仍然和排列组合一样，主要是研究离散集合中元素的排队和分组、选择与配置，以及相应的计数和构造等问题。组合论在现代已经广泛地应用到工程技术和自然科学的许多部门中，例如应用到概率论与数理统计、计算机科学以及图论等。

本书从我国古代的典型数学问题谈起，比较详细地讲述了排列组合的基本知识，注意联系现实生产中的人力安排、物资调配等实际问题，并重点讲述了排列组合在二项式定理、多项式定理和概率论等数学知识中的各种应用。

但是，在中学数学教材和一般参考书中，都只是讲述“不重复的排列组合”，而关于“有重复的排列组合”即使偶而有所论述，也过于简略，而不易读懂。其实“有重复的排列组合”也是排列组合的重要内容。本书把“有重复的”

与“不重复的”排列组合，并行讲述，比较其异同，以利于理解和掌握；并在此基础上深入浅出地讲述了“递推公式”和“母函数”这两个研究排列组合问题的重要分析方法，以及它们的许多应用；还配备了内容比较丰富的例题和习题，习题并附有解答或提示，在例题中注意分析解题思路，总结解题方法，以利于发展逻辑思维能力，理解疑难问题，掌握解题规律。本书可作为中学课外补充读物，以及进修组合论的入门读物。可供中学生、青年工人、在职干部、知识青年课外阅读或自学之用。也可供大、中学校教师参考。

由于笔者水平所限，书中难免出现缺点或错误，希望读者批评指正。

本书有关数学史问题，承内蒙师范大学李迪老师审阅和指导。在此表示由衷的感谢。

笔者于内蒙古师范大学

1982年8月1日

目　　录

§1　不重复的和重复的排列

1. 排列的概念 …………………………………………………… 1
2. 乘法原理与排列数公式 …………………………………… 5
3. 例题 ………………………………………………………………10

习　题　一

§2　不重复的组合

1. 组合的概念 ……………………………………………………26
2. 组合数公式 ……………………………………………………28
3. 例题 ………………………………………………………………30

习　题　二

§3　不尽相异元素的全排列

1. 概念 ………………………………………………………………45
2. 公式的证明 ……………………………………………………47
3. 例题 ………………………………………………………………52

习　题　三

§4　排列组合在二项式定理中的应用

1. 二项式定理 ……………………………………………58
2. 多项式定理 ……………………………………………60
3. 例题 ……………………………………………………64

习　题　四

§5　有重复的组合

1. 公式的证明 ……………………………………………76
2. 递推公式 ………………………………………………79
3. 例题 ……………………………………………………83

习　题　五

§6　排列组合与母函数

1. 母函数 …………………………………………………92
2. 组合母函数 ……………………………………………100
3. 排列母函数 ……………………………………………107

习　题　六

§7　排列组合在概率论中的一些应用

1. 事件与概率 ……………………………………………117
2. 具有等可能结果试验中的
事件的概率 ……………………………………………122

3. 互斥事件之和的概率 …… 127
4. 独立事件之积的概率 …… 132
5. 独立重复试验中的概率 …… 135
6. 条件概率与一般乘法公式 …… 142
7. 一般加法公式 …… 147
8. 全概率公式及贝叶斯公式 …… 154

习　题　七

习题参考答案

习　题　一 …… 164
习　题　二 …… 166
习　题　三 …… 172
习　题　四 …… 173
习　题　五 …… 175
习　题　六 …… 185
习　题　七 …… 188

§1　不重复的和重复的排列

你玩过黑白子的围棋吗？棋局千变万化，两相对弈几乎很少出现相同的棋局。那么总共有多少可能的棋局呢，你会计算吗？

象这样一类问题，就是排列问题，是排列与组合的内容之一。

围棋棋局总数问题，也是一个古老的问题，早在我国唐朝，有一个和尚名叫张遂（僧一行，公元683——727年），他就曾提出并计算过这个问题。北宋时期，我国著名科学家沈括（公元1031——1095年）在他的著作《梦溪笔谈》中，也曾经给出了这个棋局总数的好几种解法（见例14），这在当时达到了很高的科学水平。

排列与组合是初等代数中的一段独特的内容，是数学里的重要基础知识之一。它对于解决许多实际问题，以及进一步学习其它数学知识，都有重要的应用。

排列和组合在现代已经发展成为一个重要的数学分支——组合数学（组合论），特别是自本世纪六十年代以来，其发展尤为迅速。目前它的成果已被广泛地应用到工程技术以及许多自然科学部门中，比如概率论、计算机科学、以及图论等，都要用到组合论的方法和结果。

1. **排列的概念**　在生产实践和自然科学中，人们经常要排列事物的顺序。那么什么是排列呢？现在就让我们从浅

显的实际事例出发，引进排列的概念：

例1 呼和浩特市的电话号码，如55723，09214等，就是由从0到9这十个数字，每次取出5个，（可以重复取出）排成一定的顺序而成。这些电话号共有多少个，怎样都写出来，这是需要了解的。

例2 按先后顺序发射具有红、绿、黄三种颜色的信号弹两颗，（要求颜色不同）在军事上作短距离通讯，以传达一定的信息。这就是从三个不同颜色的信号弹中，每次取出2个，（不能重复取出）发射时按一定顺序排成先后，如"红黄"、"绿红"等。它们共有多少种，需要编排出来，以便规定它们所代表的信号。

显然，象这样把事物排成顺序的事例是经常会遇到的，研究和解决它们，不仅是生产实践的需要，也具有一定的理论价值。于是人们从众多这类事例，抽象概括出排列的概念。

定义1 从m个不同的元素中，每次取出n个不同的元素，按着一定的顺序排成一列，叫做n元不重复排列。（在中学教材中，叫做从m个不同元素中，每次取出n个不同元素的排列。）在不发生混淆时，通常简称排列。

n元不重复排列的总个数，用符号A_m^n表示（在中学教材中用新符号P_m^n来表示）。

当$n=m$时，就是把m个元素全取出来进行排队，故称这样的排列为m个不同元素的全排列，其总个数用符号P_m表示（在中学教材中用新符号P_m^m表示。这新旧两套符号，我们都采用）。显然$P_m=P_m^m=A_m^m$，是说意义相同。

定义2 从m个不同的元素中，每次取出n个元素（每

个元素都可以重复取出）按着一定的顺序排成一列，叫做n元重复排列．说全了就是m个不同元素中，每次取出n个元素，可以重复取的排列．有时也可以简称排列．n元重复排列的总个数用符号Π_m^n表示．

上述例1，$m=10$，10个不同的元素指从0到9十个数字．$n=5$，每次取出5个，（可以重复取出，如55723就是重复取5）按一定顺序排成一列，就构成电话号码．按定义2这些电话号码都叫5元重复排列．它们的总个数，也就是所有可能的五位电话号码的总数，用符号Π_{10}^5来表示，至于它等于多少，我们回头再看它．

在例2中，$m=3$，3个不同元素指三个不同颜色的信号弹．$n=2$，每次取出2个不同的信号弹（要求发射的信号弹颜色不同，故不能重复取出），按一定顺序排成一列，如“黄红”、“红绿”等，按定义1都叫做2元不重复排列．它们的总个数用A_3^2来表示，也可以用中学教材中的新符号P_3^2来表示．对于这个简单例题，不难把这些排列全都写出来：

红绿、红黄、绿红、绿黄、黄红、黄绿．

共计6个，即$A_3^2=6$，也可以写成$P_3^2=6$．

由排列的定义可以看出，n元不重复排列和n元重复排列的相同之处是，它们都是从m个不同的元素中，每次取出n个元素，按着一定的顺序摆成一列，也就是说它们都是排列；而它们相异之处是，在取出n个元素时，一个要求取出不同的n个元素，即所取的元素不允许重复．而另一个则是可以重复取出．要很好理解这两种排列概念之异同点，以便能够正确使用这些概念．比如33312、00771都是五位电话号

码，就是数字可以重复取出，所以五位电话号码是5元重复排列。但要注意，可以重复取出并不排斥在可能情况下的不重复取出，比如34651也是五位电话号码，而它也被看作是5元重复排列中的一个具体的排列，尽管它本身没有重复数字。

根据排列的定义还可以知道：如果两个排列里所含的元素不完全一样，例如“红绿”与“红黄”，那么就是不同的排列（55721和55621也是不同的排列）；如果所含元素完全一样，而排列的顺序不同，例如“红绿”与“绿红”，那么也是不同的排列（04213和40123也是不同的排列）。如果所含的元素完全一样，排列顺序也完全相同时，才是相同的排列。

为了更好地熟悉和理解排列的概念，我们再把例2演变一下，提出下列问题：

有红、绿、黄三种不同颜色的旗子，把这不同颜色的三面旗子全取出来，排成一定的顺序，升挂起来，表示一定的信号，问总共可以表示出多少不同的信号？这就是在航海中，有时使用的“旗语”。不过那里所使用的旗子的多少，以及旗子的颜色，或许与此处所说不尽相同而已。

事实上，不同颜色的三面旗子全取出来，按一定顺序的一个排列方法，就表示一种信号。所以，不同颜色的三面旗子全取出来，排成一定顺序升挂起来，所表示的不同信号的总数，就是这不同颜色三面旗子的全排列的总个数，也就是3个不同元素的全排列的总个数P_3^3（也可以写作P_3或者A_3^3）。把这3个不同元素的全排列全写出来，就是：

红绿黄，绿红黄，黄红绿，

红黄绿，绿黄红，黄绿红。

此外再没有别的排法了。因此三面不同颜色的旗子，依一定顺序排列后升挂起来，共可表示不同的信号共有$P_3^3=6$(种)

值得注意的是，从红、绿、黄三种不同颜色的旗子中，可以构成1元不重复排列，它的总个数是P_3^1；可以构成2元不重复排列，其总个数是P_3^2；也可以构成3元不重复排列，其总数就是方才求出来的$P_3^3=6$（种）。但是在这个例题中，就不可能构成多于3元的不重复排列。因为从三面不同颜色的旗子中，每次取出多于3面旗子（比如5面旗子），同时还要求颜色不同，这是不可能的。这就是说P_3^4、P_3^5以及P_8^{10}等都是没有意义的。一般地A_m^n或者P_m^n，则其中都必有$n\leqslant m$。

但是，对于n元重复排列来说，Π_m^n就没有这样的限制，而是n可以取任何自然数。比如还是从三种颜色红、绿、黄的旗子中，每次取出5面旗，在颜色上允许重复取出，（因为颜色允许重复取出，所以从三种不同颜色的旗子中，取出5面旗子，这是办得到的，只要每种颜色的旗子准备足够多个，就可以了）按一定顺序排成一列，升挂起来，就能表示出Π_3^5种不同的信号。我们在下面仅写出几个这样的5元重复排列：

黄绿绿红黄，　　红黄红红红，

绿绿红黄黄，　　红红红红红。

所有可能的这种5元重复排列数Π_3^5是多少？要计算出这些有关的问题的具体得数，就需要引进和使用“乘法原理”。

2. 乘法原理与排列数公式　在推求P_m^n和Π_m^n的公式和解答习题时，经常用到一个简单而又有启发性的计算方法：

例如从甲村到丙村需要经过乙村，即必须依次通过甲村到乙村、乙村到丙村两个步骤才能完成．已知从甲村到乙村有A_1、A_2、A_3、A_4四条道路，从乙村到丙村 有B_1、B_2、B_3三条道路，问从甲村到丙村共有多少种 走 法？（如图1.1）

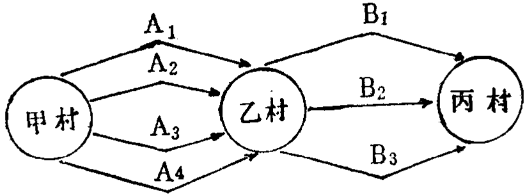
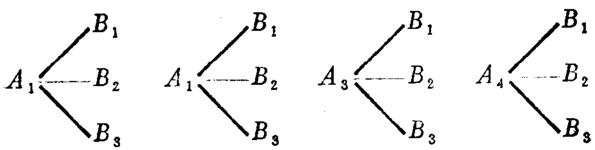


图1・1

因为从甲村到乙村有 4 种走法，在这 4 种走法里，每选定一种走法到达乙村后，再由乙村到丙村又都有 3 种走法，所以从甲村到丙村共有 4 × 3 ＝12种不同的走法，它们是：



又如习题一的第 4 题，也是这类问题．把这种计算方法推广到一般情形，就是：

完成一件事，需要分几个步骤来完成，第 1 步有m_1种方法，相应于第1步的每一种做法，第 2 步有m_2种方法，……，依此类推，相应于前面各步的每一种确定的做法，第n步有m_n种方法，那么完成这件事就共有$m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$种不同的方法．

这就是乘法原理．它是从上述所讨论的一类事例中，由

直接数个数的方法里，被抽象概括出来的．实践证明，乘法原理是解题和推求公式的主要矛盾，是解决排列组合问题的有力工具，抓住了这个主要矛盾，一切问题就容易解决了。

应该注意应用乘法原理的条件，是相应于前一步骤的每一种做法，下一步都有m_i种方法。还拿甲村到丙村之例来说，就是不论选定甲村到乙村的哪一种走法到达乙村后，再由乙村到丙村又都有2种走法，在这种条件下，才能应用乘法原理。

现在我们应用乘法原理证明下列定理。

定理1 设a_1，$a_2\cdots$，a_m是m个不同的元素，n是一个给定的正整数，则a_1，a_2，$\cdots a_m$的n元重复排列总个数

$$\Pi_m^n = m^n. \qquad (1)$$

在证明之前，先看一个具体的例．从3个不同的元素a，b，c中，构成多少个2元重复排列？每个排列的第一个位置（排头），可以放上a，b，c中的任何一个，共3种放法；不管哪种放法放好第一个位置上的元素以后，因为元素可以重复取用，所以第二个位置（排尾）还可以放上a，b，c中任何一个，也都有3种放法，故由乘法原理共得$3\times3=9$个2元重复排列如下：

aa，ba，ca，

ab，bb，cb，

ac，bc，cc，

证明 a_1，a_2，$\cdots$，a_m的每一个n元重复排列，都可以依次通过n个步骤得到．首先由a_1，a_2，$\cdots$，a_m中任取一个添在如下的第1个格里，共有m种添法；不论哪种方法添好第1格后，因为元素可以重复取用，第2格还有m种添法；

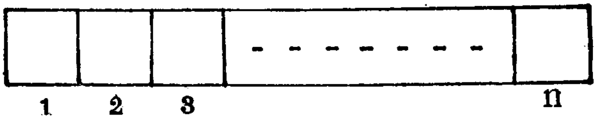


图1·2

依此类推，第 n 个格也有 m 种添法。n 元重复排列的总个数正是添足 n 个空格的方法总数，由乘法原理得该数为：

$$\underbrace{m\times m\times\cdots\times m}_{n\text{个}}=m^n.$$

定理2 由 m 个不同的元素 a_1，a_2，…，a_m 所能构成的 n 元不重复排列的总个数：

$$P_m^n=A_m^n=m(m-1)\cdots(m-n+1). \qquad (2)$$

证明 与定理 1 证明相似，第一个格有 m 种添法；不管哪种添法添完第一格后，因为元素不可以重复取用，添到第一格的那个元素，不能再取，所以第 2 格有 $m-1$ 种添法；同理，第 3 格有 $m-2$ 种添法；依此类推，第 n 个格有 $m-(n-1)$ 种添法。所以由乘法原理，所要求的 n 元不重复排列总数 A_m^n 正是(2)式，定理证毕。

特别的，由定理 2 即可得到 m 个不同元素的全排列总数：

$$P_m^m=P_m=A_m^m=m(m-1)\cdots2\cdot1. \qquad (3)$$

自然数 1 到 m 的乘积 $1\cdot2\cdot3\cdots(m-1)m$ 通常用符号 $m!$ 表示，读作"m 的阶乘"，所以(3)式又可写成：

$$P_m=m!$$

值得注意，上述"添空格"的方法，以后在解题中是常