高中学科教学重点难点集萃

——数学

北京师范学院附属中学

中国劳动出版社

高中学科教学重点难点集萃——数学

北京师范学院附属中学

中国劳动出版社

高中学科教学重点难点集萃——数学

北京师范学院附属中学

责任编辑：葛　玮

中国劳动出版社出版

（北京市和平里中街12号）

北京印刷一厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

787×1092毫米　32开本　13.75印张　308千字

1990年12月北京第1版　　1991年1月北京第1次印刷

印数：30100册

ISBN 7-5045-0628-1/G·110　　定价：4.80元

内 容 提 要

本书由北京师院附中从事高中教学多年，具有丰富教学实践 经验的高级教师编写，目的在于帮助高中教师更好的掌握高中学生应学知识 的规律，正确的解题方法，提高学生独立分析、解决问题能力的途径。内容根据大 纲要求，汲取各种版本教材之精华，以重点难点知识解疑、解题技巧分析与 训练为主，兼顾能力的培养和提高．是高中教师良好的教学参考资料．

本书主要内容包括：各单元、章节重点难点分析；精题汇解；单 元练习；习题答案与提示．

本书除主要供教师教学参考，同时也是成人参加高考、社会青年 自学、在校高中学生课外学习的重要读物和良师益友．

前言

青年时代是人生的黄金时代，是发展智力提高能力的旺盛时期。青年学生思想活跃、感情丰富、热爱学习，渴望了解五彩缤纷的大千世界。我们应趁此良机"培养他们的创造才能和广泛的智力兴趣"，帮助他们获得知识、发展思维、提高能力。

学习是艰苦的脑力劳动，但应该苦中有乐，应该越学越感到丰富自己智慧的必要性，体验到获得学习成果的无限欢乐。然而，目前相当一批青年学生仍沿用死记硬背，大量重复作题的陈旧方法。其结果是知识难度加深，而能力提高缓慢，知识与能力之间关系失调。学生学习负担过重，成绩差，产生厌学情绪。这种现象已引起社会和广大教育工作者忧虑。但分析造成这种弊端的原因，主要是有些教师对所教知识理解不深、规律掌握不够、教学又不甚得法。

为了解决这个问题贡献一点力量，我们组织了实力较强的编写组，成员均系我校高级教师，其中有市区教育学院、教师进修学校的学科教研员；市区教科所的兼职研究员；各级各类教学研究会的骨干成员。他们都有较丰富的教学经验，又有一定的教学理论水平。既能深刻理解大纲吃透教材，又能掌握学生的认知规律。编写了《高中学科教学重点难点集萃》一套丛书。主要目的供教师教学参考。

本书内容共三部分：

第一部分：以国家教委颁布的高中各科教学大纲为依据，

按单元、章、节列出重点、难点，并对重点难点知识进行扼要的剖析。

第二部分：通过典型例题，详细阐述对各类问题的分析思考方法，并配以适当的图解。

第三部分：精选习题。包括单元练习，自检试题及答案。

本书特点是：揭示知识的内在联系，授之以渔，培养思维的广阔性、灵活性和深刻性，提高分析问题解决问题的能力。

本书除主要供教师参考外，也是成人参加高考，社会青年自学，在校高中学生课外学习的良好读物。

本丛书由杜　森、霍恩儒、乔守庄、王绍宗四同志主持、参与各分册的组织与编写工作，并进行最后审定。各分册主要编写人员

王绍宗（化学）　　王文琪（语文）

李静纯（英语）　　张真藩（政治）

唐朝智（物理）　　黄健生（数学）

本书在编写期间得到中国劳动出版社二编室诸同志的热情帮助和支持，特此感谢！

本书编写时间仓促，水平有限，疏漏之处敬请读者批评指正。

北京师院附中《高中学科教学重点难点集萃》编写组

1990、7

目　录

第一部分 代　　数

一、集　　合

【重点·难点】

1. 重点

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，并能识别和使用有关的术语和符号；正确判断元素与集合，集合与集合之间的关系；正确的进行交集、并集、补集三种集合的运算.

2. 难点

有关集合的各个基本概念的涵义以及相互之间的区别和联系；运用集合的概念与运算解决有关集合与代数、三角、立体几何，解析几何的综合问题.

3. 重点知识分析

（1）集合是数学中最原始的概念之一，不能用其他更基本的概念来给它下定义；子集、真子集、交集、并集、补集等概念研究的是两个集合之间的相互关系，应注意弄清各个基本概念的涵义，相互联系和区别，必要时可结合文氏图直观验证加深理解.

（2）要正确使用有关集合及其相互关系的记号，如$\in$、$\notin$是适用于元素与集合关系的；$\subset$、$\subseteq$、$=$是适用于两个集合之间相互关系的.

（3）集合概念的三大特征：①元素的确定性，即对于

任何一个对象，都能够确定它属于或不属于某一集合；②元素的互异性，即一元素在一个集合里，不能重复出现；③元素的无序性，即在一个集合里，不必考虑元素之间的顺序。

（4）在弄懂基本概念、搞清特定字母或符合涵义的基础上，正确熟练地使用数学符号和数学语言。

【思路·方法】

1．点集的表示

例 1 表示出坐标平面内两坐标轴上的点的集合。

分析 x轴上的点的特征是纵坐标为0，y轴上点的特征是横坐标为0，本题中的集合可理解为在x轴或在y轴上的点的集合。

解法一 利用并集方式写出$\{(x,y)|y=0,\ x\in R\}\cup\{(x,y)|x=0,\ y\in R\}$。

解法二 利用$x\cdot y=0$的含义，还可写成较简单的形式，$\{(x,y)|xy=0,\ x\in R,\ y\in R\}$。

小结 解决这类问题的思路是，把问题的几何特征的数量规律反映出来即可。

2．集合概念的理解

例 2 已知集合$A=\{y|y=x^2+1,\ x\in R\}$.$B=\{y|y=x+1,\ x\in R\}$.则$A\cap B$等于（　　）。

(A) $\{(0,1),(1,2)\}$.　　(B) $\{0,1\}$.

(C) $\{1,2\}$.　　(D) $[1,+\infty)$.

分析 本题虽然是求直线与抛物线的交点，但A、B中代表元素是单元素y，不是有序数对(x,y)，实则是求y的范围，故不应选(A)而应选(D)。

小结 解决这类问题的思路是，正确理解概念的内涵与

外延.

3. 集合的运算

例 3 设 $I=R$, $A=\{x|x^2-x-2<0\}$, $B=\{x||x|=y+1, y\in A\}$, 求 $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cup\overline{B}$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A\cup B}$.

解 $\because A=(-1,2)$, $B=(-3,0)\cup(0,3)$,

$\therefore \overline{B}=(-\infty,-3]\cup\{0\}\cup[3,+\infty)$, $A\cap B=(-1,0)\cup(0,2)$, $A\cup B=(-3,3)$, $A\cup\overline{B}=(-\infty,-3]\cup(-1,2)\cup[3,+\infty)$, $A\cap\overline{B}=\{0\}$, $\overline{A\cup B}=(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

小结 解决这类问题的思路是，将 A,B 用区间表示，然后在数轴上作集合运算.

4. 判断集合之间的关系

例 4 集合 $P=\{z||z+2|+|z-2|=6, z\in C\}$, $Q=\{z||z+1|=1, z\in C\}$, 则 P、Q 之间的关系是（ ）.

(A) $P\subset Q$.　　(B) $P\supset Q$.

(C) $P=Q$.　　(D) $P\cap Q=\varnothing$.

分析 往往出现误选(B)的情况，这是受了文氏图思维定势的影响，即认为圆在椭圆内.事实上，画出图形便知，正确答案应选（D）.

小结 解决这类问题的思路是：采用列举试验，利用性质以及画图来加以判断.

5. 描绘点集的图形

例 5 设 $M=\{(x,y)||xy|=1, x>0\}$, $N=\{(x,y)|\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}y=\pi\}$. 画出 $M\cup N$ 的曲线.

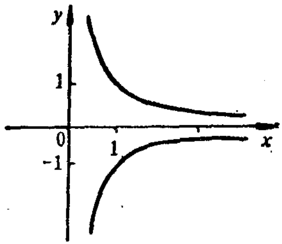

图 1

解 在 N 中，由 $\operatorname{arc\,tg}x=$

$\pi-\mathrm{arc\,ctg}y$可得 $x=-\frac{1}{y}$。

∵ $\mathrm{arc\,tg}x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{arc\,ctg}y\in(0,\pi)$

故$\mathrm{arc\,tg}x>0$。∴$x>0$。

从而 $N=\{(x,y)\,|\,xy=-1,\ x>0\}$，这样 $M\cup N=\{(x,y)\,|\,|xy|=1,\ x>0\}$，图形如图1。

小结 解决这类问题的思路是：对点集的数量规律表达式进行恒等变形，以便于利用有关知识进行描图。

6。确定点集运算过程中有关参数的值

例 6 已知 $A=\left\{(x,y)\,|\,x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4,\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 16\}$。试求 $A\subseteq B$ 时 θ 的取值范围。

分析 A 表示椭圆$\frac{x^2}{\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^2}=1$，$B$ 表示圆及圆内区域，欲使 $A\subseteq B$，即椭圆在圆内（或边界），只须椭圆的半长、短轴小于圆的半径即可。

略解 $$\begin{cases}\frac{2}{\cos\theta}\leqslant 4\\ \frac{2}{\sin\theta}\leqslant 4\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\cos\theta\geqslant\frac{1}{2}\\ \sin\theta\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

所以 θ 的范围为 $\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$。

小结 解决这类问题的思路是：借助于点集所形成的几何背景，运用方程或不等式的知识进行讨论。

【检测·练习】

练 习 一

1。单一选择题

（1）$x\in\overline{A\cup B}$的充要条件是（ ）。C

(A) $x\in\overline{A}$。 (B) $x\in\overline{B}$。

(C) $x\in\overline{A}$且 $x\in\overline{B}$。 (D) $x\in\overline{A}$ 或$x\in\overline{B}$。

（2）已知集合 $A=\{1,2\}$，$B\{2,3,4\}$，那么 $A\cup B$ 的真子集有（ B ）个。 {1,2,3,4}

(A) 14。 (B) 15。 (C) 16。 (D) 32。

（3）若 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4,\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，满足条件的集合 A 的个数是（ C ）

(A) 1。 (B)4。 (C) 8。 (D) 16。

（4）已知集合 M 和集合N，那么$M\cap N=N$的充要条件是（ D ）。

(A) $M\subseteq N$。 (B) $M\supset N$。

(C) $M=N$。 (D) $M\supseteq N$。

（5）设 $M=\{1,2,3,4,5\}$且$S\subset M$，$T\subset M$，若 $S\cap T=\{2\}$，$\overline{S}\cap T=\{4\}$，$\overline{S}\cap\overline{T}=\{1.5\}$，则下列结论中正确的是（ C ）。

(A) $3\in S$，$3\in T$。 (B) $3\in\overline{S}$，$3\in T$。

(C) $3\in S$，$3\in\overline{T}$。 (D) $3\in\overline{S}$，$3\in\overline{T}$。

（6）满足$\{a,b\}\subseteq X\subseteq\{a,b,c,d,e\}$的集合 X的个数是（ C ）。

(A) 4。 (B) 6。 (C) 8。 (D) 26。

(7) 非空集$S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$且S还满足条件：若$a\in S$则$6-a\in S$，符合上述要求的集合S的个数是（　　）．

(A) 4.　(B) 5.　(C) 7.　(D) 31.

(8) 设全集$I=Z$，$M=\{x|x=2n, n\in Z\}$，$N=\{x|x=3n, n\in Z\}$，则$M\cap\overline{N}$是（　　）．

(A) $\{x|x=3n\pm1, n\in Z\}$.　(B) $\{x|x=4n\pm1, n\in Z\}$.

(C) $\{x|x=4n$或$x=4n+2, n\in Z\}$.　(D) $\{x|x=6n\pm2, n\in Z\}$.

(9) 已知集合$A=\{y|y=1-x^2, x\in R\}$，$B=\{y|y=x^2, x\in R\}$，全集$I=R$，则集合$\overline{A}\cup\overline{B}$等于（　　）．

(A) $\left\{(x, y)|x\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y\neq\frac{1}{2}, x,y\in R\right\}$.

(B) $\varnothing$.

(C) $\{y|y\leqslant0$或$y\geqslant1\}$.

(D) $\{y|y<0$或$y>1\}$.

(10) 已知集合$A=\{x|x=12m+8n, m、n\in Z\}$，$B=\{x|x=20p+16q, p、q\in Z\}$，则（　　）．

(A) $A\supset B$.　(B) $A\subset B$.

(C) $A=B$.　(D) $A\neq B$.

2．填空题

(1) 设$M=\{P|$点$P\in$直线$l_1\}$，$N=\{Q|$点$Q\in$直线$l_2\}$，$S=\{G|$点$G\in$平面$\alpha\}$，若$M\cap N=\varnothing$，$M\cap S=\{$点$A\}$，$N\cap S=\{$点$B\}$，则l_1与l_2的位置关系是______．

(2) 已知全集$I=R$，$A=\{x|x^2-2x>0\}$，$B=\{x|x^2-2x-3<0\}$，则$A\cap B=$______．$A\cup B=$______．$\overline{A\cap B}=$______．$\overline{A\cup B}=$______．

(3) 若全集$I=\{(x,y)|x、y\in R\}$，$A=\{(x,y)|x+2y=4\}$，$B=\{(x,y)|x-y=1\}$，则$\overline{A}\cap B=$______。

(4) 方程$x^2-3x+2=0$的解集为M，方程$2x^2+2x+k=0$的非空实数解集为N，若$M\cap N=\varnothing$，则k的取值范围是______。

(5) 已知集合$A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-a<0\}$，①若$A\cap B=\varnothing$，$a\in$____；②若$A\subset B$，$a\in$____。

(6) 已知集合$A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+nx+n^2-7=0\}$，欲使$A\cap C\neq\varnothing$，$B\cap C=\varnothing$，则实数n的值______。

(7) 集合A有6个元素，集合B有4个元素，$A\cap B\neq\varnothing$且$C\subset A\cup B$，C中含有2个元素，则满足上述条件的集合C最多有____个元素。

(8) 若集合$A=\{x|-2<x<-1$或$x>1\}$，$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，且$A\cup B=\{x|x>-2\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，则$a=$____，$b=$______。

(9) 已知集合$M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)|y=x+a\}$且$M\cap N=\varnothing$，则实数$a$的取值范围是____。

(10) 在100个学生中，有篮球爱好者53人，排球爱好者73人（并非任何一个学生都必须有这两种爱好之一），则对篮球、排球都爱好的人数的最小值为______，最大值为______。

二、函　数

【重点·难点】

1．重点

理解映射与函数的概念、函数的单调性和奇偶性概念及图象特征、反函数概念及图象特征、复合函数的概念；掌握求函数表达式、定义域、值域、最值、单调区间、反函数的方法，判断函数单调性和奇偶性的方法；能充分的认识到函数的定义域在研究函数的性质以及在解综合问题中的重要作用；能描绘出函数的图象并利用图象深入地研究函数的性质并解决有关的问题。

2. 难点

反函数、复合函数、周期函数的概念；求复合函数的定义域、值域和单调区间、求函数最值的方法；解简单的函数方程.

3. 重点知识分析

（1）映射是一种特殊的对应，且具有方向性，即从 A 到 B 的映射与从 B 到 A 的映射可以是截然不同的.

（2）一一映射是一种特殊的映射，它有 3 个特点：① f：$A \to B$ 是从 A 到 B 的映射.②对于集合 A 中不同元素，集合 B 中有不同的象.③ B 中每一个元素都有原象.

（3）函数是数学中极其重要的概念之一，代数中的恒等式、方程、不等式、数列等都可以用函数概念去解释.函数的概念，性质和方法象一根红线一样贯串在有关数学知识之间，因此，在代数的整个复习过程中以函数为重点来考虑和安排复习的全局是完全必要的.

函数概念的实质是一种特殊映射，即在映射 f：$A \to B$ 中，A、B 为非空数集.且 B 中的每一个元素都有原象的一种映射.定义域、值域以及定义域到值域的对应法则是构成函数的三要素.特别要注意：两个函数对应法则完全相同，但定义域不同，则是两个不同的函数.

（4）只有一一映射确定的函数才有反函数，反函数的定义域是函数的值域，反函数的值域是函数的定义域。

（5）函数的定义域是函数的重要组成部分，一般来说，给出函数都应注明定义域。在解决有关函数的性质，画函数图象以及函数式变形，化简，解不等式，解方程，解析几何中求轨迹方程等问题时，都要注意定义域的作用，方能保证解答的完整性和严密性。

（6）函数的值域是函数的又一重要内容，在研究函数的性质，画函数图象以及解决许多列函数关系式的实际问题时，都要考虑函数的值域。

（7）复合函数是常常遇到的函数，（它的定义是：设 y 是 u 的函数，而 u 又是 x 的函数 $u=g(x)$，如果 x 在 $g(x)$ 的定义域或定义域的某个子集上取值时，所对应的 u 使函数 $f(u)$ 有定义，那么就称 y 是 x 的复合函数，且记作 $y=f[g(x)]$，(其中 u 称为中间变量)。目前，有不少的习题涉及到复合函数的性质，诸如单调性，值域等。

（8）函数的单调性是函数在整个定义域或者它的某一子集内的性质；而函数的奇偶性则是整个定义域内的性质，特别要注意不论是研究函数的奇偶性，还是单调性，都要首先考虑定义域，否则将要出现错误。如，只有函数的定义域关于坐标原点对称时，才能讨论奇偶性。

（9）掌握周期函数的定义时要特别注意两点：①T 是一个非零常量；②关系式 $f(x+T)=f(x)$ 必须对定义域中任意一个 x 值都成立。

【思路·方法】

1．映射与函