Qiaosi miaojie

巧思妙解

全新题型 • 精当分析 • 巧妙解法 • 超值受益

3+X教育考试研究室 编

初二数学

陕西师范大学出版社

Qiaosi miaojie

巧思妙解

主　编　安振平
编　写　冯梅子

初二数学

陕西师范大学出版社

图书代号:JF193700

图书在版编目(CIP)数据

巧思妙解.初二数学例题/安振平编.－西安:陕西师范大学出版社,2001

ISBN 7－5613－2230－5

Ⅰ.初 … Ⅱ.安 … Ⅲ.数学课－初中－解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 027319 号

责任编辑	朱永庚
装帧设计	徐 明
责任校对	杨 沁
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
经　　销	新华书店
印　　刷	西北大学印刷厂
开　　本	850×1168 1/32
印　　张	10.375
字　　数	237 千
版　　次	2001 年 6 月第 1 版
印　　次	2001 年 6 月第 1 次
定　　价	10.50 元

开户行:西安工行小寨分理处　账　号:216－144610－44－815

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。

电　话:(029)5251046(传真)　5233753　5307864

http://www.snuph.com

前　言

陕西师范大学原校长、博士生导师　王国俊

例题如同榜样，而榜样的力量是无穷的！

学医要研究病例，学法要分析案例，学画要临摹名画，学烹饪要研习菜谱……一句话，各种专业学习和技能培训都离不开学习相应的类型各异的“例题”。中学生的各科学习又何尝不是如此？学语文少不了学习古今中外的各种范文，学英语也是各种类型的例句伴随学习的始终，学数、理、化更是例题贯穿于学习全过程之中。教师讲例题、学生学例题构成了中学各科教学的基本内容，例题教学在一定程度上直接影响着各科教学质量的高低。

基于以上的认识，陕西师范大学出版社在世纪之交组织编写了**《巧思妙解》丛书**，在新世纪奉献给广大中学生，以期在他们的学习中助一臂之力。

本丛书例题由其基础性、示范性、典型性、启发性、综合性、应用性、创新性等诸多视角予以取舍，每一例题都有其明晰的目的和各自的特点。**基础性**在于能有助于各种基本知识、基本方法、基本技能的理解、巩固与加深；**示范性、典型性**在于能起到举一反三、触类旁通之功效，即学习一道题，会解一类题；**启发性**主要能达到开发智力、启迪思维、激发创造的目的，即能解一题，增一智；而**综合性、应用性、创新性**则旨在培养学生分析问题、解决问题的能力和创新的能力。总之，本丛书根本目的

在于全面提高学生各科的解题能力。

为了便于同学们的学习，也考虑到目前应试的要求，本丛书将每部分例题分为三大类：基础拓展、综合突破、能力应用。从而突显了所选例题内容的层次性和训练的阶梯性。

本丛书各科的每一部分前设有[**知识网络**]和[**易错指津**]两个栏目。[**知识网络**]对相应知识做了梳理，或归纳比较、或提纲挈领、或列表图示，简明扼要，一目了然，旨在为解题做必要的理论准备；[**易错指津**]则把解题中常见错误尽可能地列出，警示解题的误区，以确保解题的正确性。

在这里，我向中学生朋友们提一个小小建议：在学习本丛书时，千万别满足于看懂某一道例题，而应该紧接着想一下这个例题的示范作用是什么？解它主要用到了哪些知识？解法的关键在哪里？有无其他更好的解法？解此题易犯什么错误？等等，这样思考之后，再看看书中设置的[**思路分析**]、[**方法要领**]、[**一题多解**]、[**常见错误**]、[**引申发散**]等栏目，这将有助于提高自己分析问题和解决问题的能力，特别是自学的能力，从而将使你们受益匪浅。

例题不仅是学习各科知识入门的向导，而且是创新精神的激活剂。学习例题可以多快好省地助你直接获取需要的知识，学习例题最易于自学而可以无师自通。本丛书是课内的课外书，也是课外的课内书，因为它与教材相辅相成，相得益彰，是课堂学习有益的补充，有助于增强同学们的应试能力，提高大家各学科的素质和学习成绩。

最后祝中学生朋友们学业进步，健康成长！

2001 年 4 月 18 日

目录

代数部分

几何部分

目录

代数部分

八、因式分解

知识网络

- 因式分解
  - 定义
  - 方法
    - 1. 提公因式法
    - 2. 运用公式法
    - 3. 分组分解法
    - 3. 十字相乘法
  - 步骤
    - 1. 提取公因式
    - 2. 用公式或十字相乘
    - 3. 分组分解
    - 4. 分解到每个因式都不能再分解

易错指津

1. 不注意多项式因式分解与乘法的区别，在进行因式分解时产生半途又转向做乘法的错误.

2. 提取公因式时，易出现公因式的系数不是各项系数的最大公约数，公因式的字母不是各项都含有的字母，且各字母的指数不是相同字母次数最低的，或出现漏项等错误.尤其在提取多项式时，由于没正确掌握符号的变化规律，而出现变号的错误.

3. 用公式分解因式时，往往因公式记忆有误，而出现错误.

4. 分组分解时，常出现仅把多项式中某几项化成积的形式，而多项式整体并非积的形式的错误.

5. 出现分解不彻底，即出现没有进行到每一个多项式因式都不能再分解为止的错误.

典型例题评析

基础拓展

例 1 下列从左到右的变形，是多项式因式分解的是(　　)

A. $3m^2-6mn+18n^2=3(m^2-2mn+6n^2)$

B. $(2x+3y)(2x-3y)=4x^2-9y^2$

C. $a^2-4ab+4b^2-1=a(a-4b)+(2b+1)(2b-1)$

D. $a+1=a\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$

解 B从左到右是做乘法运算，而不是因式分解. C的右边整体是和的形式，而不是积的形式. D从左到右虽是化为积的形式，但其中 $1+\dfrac{1}{a}$ 不是整式. 故可排除B、C、D，应选A.

理解多项式因式分解的意义在于把一个多项式化成几个整式的积的形式，这里应着重理解“整式”与“积”的意义.

『常见错误』 一些学生初学因式分解时，往往易犯C中的错误，即把某几项化为积的形式，而整体并非积的形式.

例 2 下列各式的因式分解结果中，正确的是(　　)

A. $12a^2b-14a^2b^2+2ab=2ab(6a-7ab)$

B. $-4x^3+6x^2y-10xy^2=-2x(2x^2+3xy-5y^2)$

C. $p(x-y)^2+q(y-x)=(px-py-q)(x-y)$

D. $27a^{n+2}b^7-3a^nb^3=3a^nb^3(9a^2b^4-1)$

解 A中右边$2ab(6a-7ab)=12a^2b-14a^2b^2$，而$2ab(6a-7ab+1)=12a^2b-14a^2b^2+2ab$，所以原式分解因式应为$2ab(6a-7ab+1)$，而不是$2ab(6a-7ab)$. B中提出$-2x$后第二、三项的符号应改变，即$-4x^3+6x^2y-10xy^2=-2x(2x^2-3xy+5y^2)$. D中右边的因式$9a^2b^4-1$还可以继续分解. 故可排除A、B、D，应选C.

「方法要领」 因式分解中应注意的3点事项：

1. 从A可见若多项式中某一项作为公因式被提取后，这一项的位置上应是1，不能漏掉，否则分解后的多项式就比原多项式减少了一项.

2. 从B可见如果多项式的第一项的系数为负的，一般要提出"－"号，使括号内的第一项系数是正的. 注意在提出"－"号时，括号内各项的符号一定要改变.

3. 从D可见分解因式必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

例3 把下列各式分解因式：

(1) $15x^3y^2-10x^2y$；

(2) $-8x^4y^m-6x^3y^{m+1}+2x^3y^m$；

(3) $\frac{9}{5}m^2n+\frac{4}{5}n$；

(4) $x^3y^{2n}z^n+x^2y^{2n+1}z^{n+2}-3x^2y^{2n+2}z^{n-1}$.

解 (1) $15x^3y^2-10x^2y=5x^2y\cdot 3xy-5x^2y\cdot 2$

$$=5x^2y(3xy-2).$$

(2) $-8x^4y^m-6x^3y^{m+1}+2x^3y^m=-2x^3y^m(4x+3y-1)$.

(3) **解法1** $\frac{9}{5}m^2n+\frac{4}{5}n=n\left(\frac{9}{5}m^2+\frac{4}{5}\right)$.

解法2 $\frac{9}{5}m^2n+\frac{4}{5}n=\frac{1}{5}n(9m^2+4)$.

(4) $x^3y^{2n}z^n+x^2y^{2n+1}z^{n+2}-3x^2y^{2n+2}z^{n-1}$

$$=x^2y^{2n}z^{n-1}\cdot xz+x^2y^{2n}z^{n-1}\cdot yz^3-x^2y^{2n}z^{n-1}\cdot 3y^2$$

$=x^2y^{2n}z^{n-1}(xz+yz^3-3y^2)$.

「方法要领」 公因式的系数应取各项系数的最大公约数，字母取各项的相同字母，而各字母的指数取次数最低的.

例 4 把下列各式分解因式：

(1) $a(x+y)+b(x+y)-(x+y)^2$;

(2) $4a(x-2y)-2b(2y-x)$;

(3) $a^2b(a-b)+\frac{1}{2}ab(b-a)^2+2ab^2(b-a)$;

(4) $5x^3y(x-y)^3-10x^4y^3(y-x)^2$;

(5) $x(x-y)^2(a-b)-(y-x)^3(b-a)$;

(6) $(x-y)^{2m}-(y-x)^m$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&a(x+y)+b(x+y)-(x+y)^2\\=&(x+y)[a+b-(x+y)]\\=&(x+y)(a+b-x-y).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&4a(x-2y)-2b(2y-x)\\=&4a(x-2y)+2b(x-2y)\\=&2(x-2y)(2a+b).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&a^2b(a-b)+\frac{1}{2}ab(b-a)^2+2ab^2(b-a)\\=&a^2b(a-b)+\frac{1}{2}ab(a-b)^2-2ab^2(a-b)\\=&\frac{1}{2}ab(a-b)[2a+(a-b)-4b]\\=&\frac{1}{2}ab(a-b)(3a-5b).\end{aligned}$$

(4) **解法 1**
$$\begin{aligned}&5x^3y(x-y)^3-10x^4y^3(y-x)^2\\=&5x^3y(x-y)^3-10x^4y^3(x-y)^2\\=&5x^3y(x-y)^2(x-y-2xy^2).\end{aligned}$$

解法 2

$$5x^3y(x-y)^3-10x^4y^3(y-x)^2$$
$$=-5x^3y(y-x)^3-10x^4y^3(y-x)^2$$
$$=-5x^3y(y-x)^2(y-x+2xy^2).$$

(5) **解法 1**

$$x(x-y)^2(a-b)-(y-x)^3(b-a)$$
$$=x(x-y)^2(a-b)-(x-y)^3(a-b)$$
$$=(x-y)^2(a-b)[x-(x-y)]$$
$$=(x-y)^2(a-b)y$$
$$=y(x-y)^2(a-b).$$

解法 2

$$x(x-y)^2(a-b)-(y-x)^3(b-a)$$
$$=x(y-x)^2(a-b)+(y-x)^3(a-b)$$
$$=(y-x)^2(a-b)[x+(y-x)]$$
$$=y(y-x)^2(a-b).$$

(6) $(x-y)^{2m}-(y-x)^m$

$$=(y-x)^{2m}-(y-x)^m$$
$$=(y-x)^m[(y-x)^m-1].$$

「方法要领」 1.多项式中各项的公因式，不仅可以是单项式，也可以是多项式.当公因式是多项式时，把它看做一个整体，提取相同因式的最低次幂.

2.有些题表面上看，没有公因式，但只要作适当的变形，就可出现公因式.二项式幂的变号有以下的规律：

$$(y-x)^2=(x-y)^2,$$
$$(y-x)^3=-(x-y)^3,$$
$$(y-x)^{2n}=(x-y)^{2n},$$
$$(y-x)^{2n-1}=-(x-y)^{2n-1}\quad (n\text{ 为自然数}).$$

3.解这类问题的关键是要掌握符号的变化规律，要防止变号时

出现错误，如$(y-x)^2=-(x-y)^2$或$(y-x)^3=(x-y)^3$.

例 5 把下列各式分解因式：

(1) $a^2b^4-0.25c^4$；　　(2) $-\frac{1}{4}x^2+0.09y^2$；

(3) $4(a+2)^2-9(a+3)^2$；　(4) $(a+b)(a-b)^2-(a+b)^3$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&a^2b^4-0.25c^4\\=&(ab^2)^2-(0.5c^2)^2\\=&(ab^2+0.5c^2)(ab^2-0.5c^2).\end{aligned}$$

(2) **解法 1**
$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}x^2+0.09y^2\\=&-\left(\frac{1}{4}x^2-0.09y^2\right)\\=&-\left(\frac{1}{2}x+0.3y\right)\left(\frac{1}{2}x-0.3y\right).\end{aligned}$$

解法 2
$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}x^2+0.09y^2\\=&0.09y^2-\frac{1}{4}x^2\\=&\left(0.3y+\frac{1}{2}x\right)\left(0.3y-\frac{1}{2}x\right).\end{aligned}$$

解法 3
$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}x^2+0.09y^2\\=&-\frac{1}{4}(x^2-0.36y^2)\\=&-\frac{1}{4}(x+0.6y)(x-0.6y).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&4(a+2)^2-9(a+3)^2\\=&[2(a+2)]^2-[3(a+3)]^2\\=&[2(a+2)+3(a+3)][2(a+2)-3(a+3)]\\=&(2a+4+3a+9)(2a+4-3a-9)\\=&(5a+13)(-a-5)\\=&-(5a+13)(a+5).\end{aligned}$$

(4)　$(a+b)(a-b)^2-(a+b)^3$

$=(a+b)[(a-b)^2-(a+b)^2]$
$=(a+b)[(a-b)+(a+b)][(a-b)-(a+b)]$
$=(a+b)\cdot 2a\cdot(-2b)$
$=-4ab(a+b)$.

「方法要领」 1.平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 中 a、b 可以是数、字母或多项式.

2.使用平方差公式的条件:

(1) 是两项式,或可以化成两项式;

(2) 两项绝对值都可以写成平方式;

(3) 两项符号相反.

「常见错误」 没认清所给多项式化成哪两个数的平方差,即公式中的 a、b 在本题中各表示什么,就急于分解.如

错解 $-\frac{1}{4}x^2+0.09y^2$
$=-\left(\frac{1}{2}x\right)^2+(0.3y)^2$
$=\left(\frac{1}{2}x+0.3y\right)\left(\frac{1}{2}x-0.3y\right)$.

错解 $4(a+2)^2-9(a+3)^2$
$=[4(a+2)+9(a+3)][4(a+2)-9(a+3)]$.

例 6 把下列各式分解因式:

(1) $a^4-8a^2b^2+16b^4$;

(2) $\frac{1}{2}x^2+2xy+2y^2$;

(3) $-(x-1)^2-2(x^2-1)-(x+1)^2$;

(4) $(m+n)^2-4(m+n-1)$;

(5) $4a^2b^2-(a^2+b^2)^2$.

解 (1) $a^4-8a^2b^2+16b^4$
$=(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot(4b^2)+(4b^2)^2$
$=(a^2-4b^2)^2$

$=[(a+2b)(a-2b)]^2$

$=(a+2b)^2(a-2b)^2$.

(2) $\frac{1}{2}x^2+2xy+2y^2$

$=\frac{1}{2}(x^2+4xy+4y^2)$

$=\frac{1}{2}(x+2y)^2$.

(3) $-(x-1)^2-2(x^2-1)-(x+1)^2$

$=-[(x-1)^2+2(x-1)(x+1)+(x+1)^2]$

$=-[(x-1)+(x+1)]^2$

$=-4x^2$.

(4) $(m+n)^2-4(m+n-1)$

$=(m+n)^2-4(m+n)+4$

$=(m+n-2)^2$.

(5) **解法 1** $4a^2b^2-(a^2+b^2)^2$

$=(2ab)^2-(a^2+b^2)^2$

$=[2ab+(a^2+b^2)][2ab-(a^2+b^2)]$

$=(2ab+a^2+b^2)(2ab-a^2-b^2)$

$=(a+b)^2[-(a-b)^2]$

$=-(a+b)^2(a-b)^2$.

解法 2 $4a^2b^2-(a^2+b^2)^2$

$=-[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2]$

$=-(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)$

$=-(a+b)^2(a-b)^2$.

「方法要领」 1.完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 中的 a、b 可以是数、字母或多项式.

2.使用完全平方公式的条件:

(1) 是三项式,或可以化成三项式;

(2) 有两项可化为两个数的平方和的形式,剩余的第三项是这

两个数的积的 2 倍.

3. 对有些题表面看来无法运用公式，但经过适当的灵活变形（如第(3)题提出"$-$"号，来改变各项的符号；第(2)题提出$\frac{1}{2}$，使各项系数符合公式；第(4)题重新组合等）可化为公式形式.

例 7 判断下列各式因式分解是否正确：

(1) $-a^2+b^2=-(a+b)(a-b)$；

(2) $1-4x^2y^2=(1+4xy)(1-4xy)$；

(3) $(a+b)^2-(a+b)+\frac{1}{4}=\left(a+b-\frac{1}{2}\right)^2$；

(4) $81x^4-y^4=(9x^2+y^2)(9x^2-y^2)$；

(5) $-m^2-n^2=-(m+n)(m-n)$；

(6) $y^2+y+\frac{1}{4}=4y^2+4y+1=(2y+1)^2$；

(7) $mn(a-b)-m(b-a)=m(a-b)(n-1)$；

(8) $a(a-b+c)+b(b-a-c)+c(a-b+c)=(a-b+c)^2$.

解 (1) 正确； (2) 不正确，应分解为$(1+2xy)(1-2xy)$； (3)正确； (4) 不正确，没有将因式分解到底； (5) 不正确，不能用平方差公式； (6) 不正确，$y^2+y+\frac{1}{4}\neq 4y^2+4y+1$； (7) 不正确，应分解为 $m(a-b)(n+1)$； (8) 正确.

『方法要领』 提取多项式公因式时应注意符号变化规律以及利用平方差公式、完全平方公式分解因式时首先认清公式中的 a、b 在本题中各表示什么.

例 8 解答题：

(1) 如果 $x^2+2(m-3)x+16$ 是一个完全平方式，求 m 的值；

(2) 已知 $x+y=1$，求$\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$ 的值；

(3) 已知 $a-b=2$，$ab=-3$，求 a^2+b^2 的值；

(4) 已知$(m+3n)(m+3n-6)+9=0$，求 $m+3n$ 的值；

(5) 已知 m、n 满足 $m^2+n^2-4m+16n+68=0$，求 m、n 的值.

解 (1) $x^2+2(m-3)x+16$

$=x^2+2\cdot x\cdot(m-3)+4^2$.

如果 $x^2+2(m-3)x+16$ 是一个完全平方式，

那么 $m-3=\pm4, m=7$ 或 -1.

(2) 已知 $x+y=1$，

所以 $\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)$

$=\frac{1}{2}(x+y)^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$.

(3) 已知 $a-b=2, ab=-3$，所以

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=2^2+2\times(-3)=4-6=-2.$$

(4) 已知 $(m+3n)(m+3n-6)+9=0$，

所以 $(m+3n)^2-6(m+3n)+9=0$，

$(m+3n-3)^2=0$，

$m+3n-3=0$，

$m+3n=3$.

(5) 已知 $m^2+n^2-4m+16n+68=0$，

所以 $m^2+n^2-4m+16n+4+64=0$，

$(m^2-4m+4)+(n^2+16n+64)=0$，

$(m-2)^2+(n+8)^2=0$.

又 $(m-2)^2\geqslant0, (n+8)^2\geqslant0$，

非负数之和等于零，则每一个加数必为零.

所以 $(m-2)^2=0, (n+8)^2=0$，

$m-2=0, n+8=0$，

所以 $m=2, n=-8$.

「方法要领」 1. 解这类问题的关键是要灵活运用完全平方公式及有关变形. 如