

解題錯誤類型評析

初中數學

北京師範學院出版社

初中数学解题错误类型评析

刘仲宣 陈淑文 编
宋绳德 林 坚

北京师范学院出版社

1988年·北京

责任编辑：段素霞

封面设计：周钦尧

CHUZHONGSHUXUE

初中数学解题错误类型评析

主 编

北京师范学院出版社出版
新华书店北京发行所发行
福州五中印刷厂印刷

787×1092毫米 32 开本 7.5 印张 168 千字

1989年1月第一版 1989年1月第一次印刷

印数：1—20,000册

ISBN 7-81014-272-0/G·243 定价：2.40元

编 者 的 话

学生步入初中时，总感到中学课程门类多，各科知识内容份量大，学习方法不能适应，在平时学习或考试中，往往出现这样或那样的解题错误。

怎样科学地指导学生总结教训和纠正解题出现的各种类型错误，我们应北京师范学院出版社之约，组织一批富有经验的教师，根据现行初中各科教学大纲和教材的要求，针对历届中考和平时考试解题中所出现的各种错误，编写了《初中各科解题错误类型评析丛书》，对此作了回答。

《丛书》计分语文、数学、政治、英语、理化五册。各册按题类分章进行编写，各章包括错误类型、错误产生原因及其评析和自我检测训练三部份。编写时，注意说明题型类的特点，由浅入深地列举各种具有代表性的错误类型，深入浅出地具体分析其产生的原因，简明扼要地指出正确解题的要领、方法及步骤。书中还附有若干自我检测题及其简要答案。在选用例题时，注意到知识内容重点、难点和复盖面。《丛书》可帮助学生增强解题错误的“免疫力”有效地提高学习效果。是初中学生和自学青年理想辅导书，也是初中教师具有参考价值的用书。

《初中数学解题错误类型评析》一书，针对数学概念较为复杂的特点，全书根据题型分章编写，着重对选择、填空、判断、计算和证明等题型错误类型进行归类，分析其产生错误原因，并指导正确掌握解题的方法、要领及步骤。同

时每章还照顾到各年段知识要点和难点，便于学习。

本书由刘仲宣、陈淑文、宋绳德、林坚同志编写。在编写的过程中，曾得到许多热心数学教学同道支持。谨借此致以谢忱。

《丛书》成书匆促，疏谬之处，诚祈读者指正。

《初中各科解题错误类型评析丛书》编委会

一九八八年十月

目 录

第一章	选择题		(1)
第二章	填空题		(51)
第三章	判断题		(82)
第四章	计算题		(107)
第五章	证明题		(182)
习题答案			(228)

第一章 选择题

(A、B、C、D四个答案中只有一个正确)

初 一 部 分

例题1 75320保留三个有效数字的近似数是()

(A) 75300 (B) 753 (C) 7.53×10^4 (D) 无法确定

错解1: $75320 \approx 75300$ (保留三个有效数字) 故选择 (A)

错解2: $75320 \approx 753$ (保留三个有效数字) 故选择 (B)

错解分析: 如果把75320写成75300实际上是保留了五个有效数字, 因此不合要求; 如果把75320写成753, 753是三个有效数字, 但和75320的误差太大, 不成其近似数。

正确解答: $75320 \approx 7.53 \times 10^4$ 故应选择 (C)

例题2

化简: $1 - \frac{3a}{2b} + \frac{3a}{2b} \times \frac{2b}{3a}$ 得 ()

(A) $\frac{3a}{2b}$ (B) $\frac{2b}{2a}$ (C) $\frac{2b-3a}{2b}$
(D) $\frac{3a-2b}{3a}$

错解:

$$\text{原式} = 1 - \frac{3a}{2b} + 1 = 1 - \frac{3a}{2b} = \frac{2b-3a}{2b}$$

故选择 (C)

错解分析:

在 $\frac{3a}{2b} + \frac{3a}{2b} \times \frac{2b}{3a}$ 中只有同一级的混合运算, 其运算顺序

应是从左到右依次运算, 不应该先算 $\frac{3a}{2b} \times \frac{2b}{3a}$

正确解答: 原式 $= 1 - \frac{3a}{2b} \times \frac{2b}{3a} \times \frac{2b}{3a} = 1 - \frac{2b}{3a} =$

$\frac{3a-2b}{3a}$ 故应选择 (D)

例题 3. 一项工程, 甲单独做 a 小时完成, 乙单独做 b 小时完成, 甲乙合作每小时能完成任务的 ()

(A) $\frac{1}{ab}$ (B) $\frac{1}{a+b}$ (C) $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

(D) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

错解: 甲乙合作的时间是 $a+b$, 故每小时能完成任务的 $\frac{1}{a+b}$ 故选择 (B)

错解分析: $a+b$ 是甲单独完成任务和乙单独完成任务的时间的和, 而这个时间和, 实际是完成两次该任务的用时, 所以选择是错误的。

正确解答: 甲单独做 a 小时完成, 故每小时完成任务的 $\frac{1}{a}$, 乙单独做 b 小时完成, 故每小时完成任务的 $\frac{1}{b}$, 所以甲乙合作, 每小时完成任务的 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 故应选择 (D)

例题 4 已知 c 为有理数, 若 $a > b$, 则下列不等式成立的是 ()

(A) $ac > bc$ (B) $ac < bc$ (C) $ac^2 > bc^2$

(D) $ac^2 \geq bc^2$

错解：因为任何数的平方都是正数，所以 $c^2 > 0$ 又因为 $a > b$ ，所以 $ac^2 > bc^2$ ，故选择 (C)

错解分析：任何数的平方都是正数，这句话是错误的，因为零的平方是零，零既不是正数也不是负数，故 c^2 有可能是零，所以选择 (C) 是错误的。

正确解答：题目中隐含着 C 可以为正数，负数或零，因此 (A) (B) (C) 不能保证成立、故被淘汰，于是选择 (D)

例题 5 洗衣机每台原价为 a 元，在第一次降价 20% 的基础上再降 15%，则洗衣机现价为 () 元

(A) $65\% a$ (B) $80\% a + 75\% a$ (C) $77\% a$
(D) $68\% a$

错解：原价为 a 元，第一次降价 20%，即降了 $20\% a$ 元，所以第一次降价后，洗衣机每台为 $(a - 20\% a)$ 元，第二次降价 15%，即降了 $15\% a$ 元，所以第二次降价后，洗衣机每台价格为 $(a - 20\% a - 15\% a)$ ，即 $65\% a$ 元，故选择 (A)

错解分析：第二次降价是在第一次降价的基础上降价的，即再降 15 是对 $(a - 20\% a)$ 元来说的，所以第二次降了 $15\% (a - 20\% a)$ 元，故选择 (A) 是错误的

正确解答： $a - 20\% a - 15\% (a - 20\% a) = 68\% a$
故应选择 (D)

例题 6 在整数 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中，质数的个数为 x ，偶数的个数为 y ，完全平方数的个数为 z ，则 $x + y + z$ 等于

(A) 14 (B) 13 (C) 12 (D) 11

错解：因为 2, 3, 5, 7 是质数，故 $x = 4$ ；2, 4, 6, 8 为偶数，故 $y = 4$ ，1, 4, 9 为完全平方数，故 $z = 3$ ，所以 $x + y + z = 11$ ，选择 (D)

错解分析：0 既是偶数又是完全平方数，错解中偶数漏掉了 0，完全平方数也漏掉了 0 故选择是错误的

正确解答：(B)

例题 7 在有理数范围内，分解 $4a^4 - \frac{a}{2}$ 得 ()

(A) $a(4a^3 - \frac{1}{2})$ (B) $\frac{a}{2}(2a - 1)(4a^2 - 2a + 1)$

(C) $\frac{a}{2}(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$ (D) 以上答案都不对

错解：原式 = $a(4a^3 - \frac{1}{2})$ 因为 $4a^3 - \frac{1}{2}$ 在有理数范围内不能再分解了，故选择 (A)

错解分析： $4a^3 - \frac{1}{2}$ 在有理数范围内还可以分解，只要再提出 $\frac{1}{2}$ 就可再分解下去，故选择 (A) 是错误的

$$\begin{aligned} \text{正确解答：原式} &= \frac{a}{2}(8a^3 - 1) \\ &= \frac{a}{2}(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) \end{aligned}$$

故应选择 (C)

〔自我检测题〕指出下列解法错在何处，并加以订正：

1. 如果 $a < b < 0$ ，那么下列不等式成立的是 ()

(A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $ab < 1$ (C) $\frac{a}{b} < 1$

(D) $\frac{a}{b} > 1$

错解: $\therefore a < b$

$$\frac{a}{b} < \frac{b}{b}$$

即 $\frac{a}{b} < 1$ 故选择 (C)

2. 若关于 X 的方程 $3x - 5 + a = bX + 1$ 有唯一解, 则 ()

(A) $a \neq 2b$ (B) $a \neq 6$ (C) $b \neq 0$ (D) $b \neq 3$

错解: $\therefore 3x - 5 + a = bx + 1$

$$\therefore 3x - bx = 5 - a + 1$$

$$\therefore 3x - bx = 6 - a$$

当 $6 - a \neq 0$ 时, 即 $a \neq 6$ 时, 方程有唯一解故选择 (B)

3. x 表示一个两位数, y 表示一个三位数, 如果把 x 放在 y 的左边组成一个五位数, 可以表示成 ()

(A) xy (B) $x + y$ (C) $100x + y$ (D) $1000x + y$

错解: 把 x 放在 y 的左边, 即 xy . 故选择 (A)

4. 某生产队现有水田 a 亩, 如果现有的比原有的增加 85%, 则原有的水田亩数为 ()

(A) $(1 + 85\%)a$ (B) $(1 - 15\%)a$
(C) $\frac{a}{1 + 85\%}$ (D) $\frac{a}{1 - 85\%}$

错解: 现有的比原有的增加 85%, 则原有的比现有的减少 15%. 故选择 (B)

5. 123456 精确到万位. 有效数字为 ()

(A) 6 个 (B) 4 个 (C) 2 个 (D) 无法确定

错解: $123456 \approx 120000$ (精确到万位) 故选择 (A)

6. 要将含盐 $a\%$ 的盐水 a 克, 制成 $2a\%$ 的盐水, 需要加盐 () 克

(A) a (B) $\frac{a}{100+a}$ (C) $\frac{a}{100-2a}$

(D) $\frac{a^2}{100-2a}$

错解: 浓度从 $a\%$ 变成 $2a\%$, 故应加盐 a 克, 所以选择 (A)

7. 如果分式 $\frac{(x-2)(x-3)}{2x^2-5x+2}$ 的值等于零, 则 x 的取值为 ()

(A) 2 (B) 3 (C) 2 或 3 (D) 0

错解: 当 $x = 2$ 或 3 时, 分式的分子的值都等于零, 所以选择 (C)

8. 化简 $|a+2| + 2-a$, 得 ()

(A) 4 (B) $-2a$ (C) 4 或 $-2a$ (D)

以上答案都不对

$$\begin{aligned}\text{错解: 原式} &= (a+2) + 2-a \\ &= a+2+2-a \\ &= 4\end{aligned}$$

故选择 (A)

初二部分

例题 1 $\sqrt[3]{4}$ 是 a 的立方根, 则 a 的平方根是 ()。

(A) 2; (B) ± 2 ; (C) ± 4 ; (D) ± 8 。

错解: $\because$ 由已知得 $a = 4^3 = 64$

$\therefore a$ 的平方根是 $\pm\sqrt{64} = \pm 8$ 。

选答案 (D)。

错解分析：被开数 a 求错了。这是由于立方根定义不明确而导致这个错误。

正确解答：∵ $a = (\sqrt[3]{4})^3 = 4$

∴ a 的平方根是 $\pm\sqrt{4} = \pm 2$ 。

应选答案 (B)

例题2 将 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 中根号外的因式移到根号内，结果是

()

(A) $-\sqrt{-a}$; (B) $\sqrt{-a}$; (C) $-\sqrt{a}$;

(D) $\sqrt{-a}$ 。

错解：因为 $a\sqrt{-\frac{1}{a}} = \sqrt{a^2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{-a}$ ，所以

选答案 (D)。

错解分析：正用或反用二次根式公式 $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ 都必须注意字母的限制条件，而题目又把字母 a 的限制条件隐蔽在 $\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 必有 $a < 0$ 中，上解忽略条件，概念不熟练，造成了错解。

正确解答：由条件可知 $a < 0$ ，则

$$\begin{aligned} a\sqrt{-\frac{1}{a}} &= -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-\frac{1}{a}} = -\sqrt{a^2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} \\ &= -\sqrt{-a} \end{aligned}$$

应选答案 (A)

例题3 化简下列各个二次根式

(A) $\sqrt{18x^2y} = x\sqrt{18y}$;

$$(B) \sqrt{(a^2+b^2)^3} = (a^2+b^2) \sqrt{a+b};$$

$$(C) \sqrt{\frac{8a^2}{(a-b)^2}} \quad (\text{其中 } 0 < a < b)$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}a}{a-b};$$

$$(D) \sqrt{\frac{b(x+y)^2}{4a^3}} = \frac{x+y}{2a^2} \sqrt{a}.$$

其中正确的是 ()

错解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{18x^2y}$ 的 $18x^2y$ 中, 只有因式 x^2 的指数 2 不小于 2, 故化简后得 $x\sqrt{18y}$, 选答案 (A)。

错解分析: 最简二次根式要求的两个条件之一, “被开方数每一个因式的指数都小于根指数 2” 的每一个因式包括数的分解, 即 $18 = 3^2 \times 2$, 3^2 也是个指数不小于 2 的因式。上解就是由于没有理解到这点而造成错解。

正确解答: 应选答案 (C)。这是

$$\because 0 < a < b \text{ 即 } a > 0, a - b < 0.$$

$$\therefore \sqrt{\frac{8a^2}{(a-b)^2}} = \frac{\sqrt{8a^2}}{\sqrt{(a-b)^2}} = \frac{2\sqrt{2}a}{-(a-b)}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}a}{a-b}$$

例题4 在下列各题

$$(1) \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \frac{9}{3} = 3;$$

$$(2) \frac{2-x}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{(\sqrt[3]{x^3})^2} \text{ 成立的条件是 } x \leq 2;$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{a-1}} = \frac{1+\sqrt{a}}{a-1};$$

$$(4) \sqrt{(a^2-b^2)(a+b)} (a > b > 0)$$

$$= a + b\sqrt{a-b};$$

$$(5) (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y - \sqrt{xy}) = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}.$$

中错误的是 ()

- (A) (1) (2); (B) (2) (3) (4);
(C) (1) (2) (4); (D) (3) (5)

错解: (1) 显然是错的。(2) 中没有考虑分母 $x \neq 0$ 。所以选答 (A)

错解分析: 遗漏 (4), $\sqrt{(a^2 - b^2)(a + b)} (a > b > 0) = \sqrt{(a + b)^2(a - b)} = (a + b)\sqrt{a - b}$, 题中错误表达为 $a + b\sqrt{a - b}$ 。

正确选答: (1)、(2)、(4) 都是错的, 应选答案 (C)

例5 若自然数 a 的算术平方根是 x , 则下一个自然数的算术平方根是 ()。

- (A) $x + 1$; (B) $\sqrt{x} + 1$; (C) $x^2 + 1$;
(D) $\sqrt{x^2 + 1}$ 。

错解: 下一个自然数比前一个大 1, 所以所求的数是 $\sqrt{x} + 1$ 。选答案 (B)

错解分析: 题意未理解清楚造成错解。自然数是 a , 下一个自然数就应是 $a + 1$, 而 $a + 1$ 如何用 x 表示, 能据题意正确表示出, 就能挑选出其中正确答案。

正确解答: 因为自然数 a 的算术平方根是 x , 故 $a = x^2$, 则得 $a + 1 = x^2 + 1$, 下一个自然数的算术平方根就是 $\sqrt{x^2 + 1}$ 。应选答案 (D)。

例题6 在以下关于 x 的方程中, 一元二次方程的个数是 ()。

$$(1) \frac{x}{m+1} = mx - 1;$$

$$(2) \sqrt{2}x^2 - 1 = (\sqrt{2} + 1)x^2;$$

$$(3) x^2 - 1 = \sqrt{x+2};$$

$$(4) (m+1)x^2 - 2mx + 3 = 0;$$

$$(5) 5(x-1)^2 = 3(x+2)^2 - 1;$$

$$(6) x^2 - abx = 0.$$

答案：(A) 2个； (B) 3个； (C) 4个；

(D) 5个。

错解：因(2)、(4)、(5)、(6)四个方程都是一元二次方程，所以选答(C)。

错解分析：只含一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫做一元二次方程。判定一个方程是不是一元二次方程，一是整式方程，一是只有一个未知数，再一个是要有未知数的二次项。而第(4)个方程的首项 $(m+1)x^2$ 的系数未明确是非零实数，所以方程(4)不能断定。

正确解答：符合一元二次方程定义的只有方程(2)、(5)、(6)。所以应选答(B)。

例题7 a 是非正数，则 $a^2 + a + \frac{1}{2}$ 的值是 ()。

(A) 恒为正数； (B) 恒为负数； (C) 非负数； (D) 不能确定。

错解： $\because a \leq 0$ 则 $a^2 \geq 0$ ， $a^2 + \frac{1}{2} > 0$

$$\therefore a = 0 \text{ 时 } a^2 + a + \frac{1}{2} > 0$$

而 $a < 0$ 时， $a^2 + \frac{1}{2}$ 与 a 那个绝对值大无法确定。

$\therefore$ 选答案(D)

错解分析：没有用学过知识判断 $a^2 + \frac{1}{2}$ 与 a 大小关系，妄加猜测而选择错误答案。 $a^2 + a + \frac{1}{2}$ 到底是个什么范围数，可以利用配方法和实数知识得到解决的。

$$\begin{aligned}\text{正确解答：}\because a^2 + a + \frac{1}{2} &= a^2 + 2 \times \frac{1}{2}a + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

又 a 是实数， $a + \frac{1}{2}$ 还是实数，

$$\therefore \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0.$$

$\therefore$ 应选答案 (A)

例题8 若 n 是关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 的根， $n \neq 0$ ，则 $m + n$ 等于 ()。

(A) $-n$ ； (B) -1 ； (C) 1 ； (D) 以上答案要不对。

错解： $\because n$ 是方程的根，

$$\therefore n + mn + n = 0$$

$$(m + 2)n =$$

$$\therefore m = -2.$$

$$\therefore m + n = -2 + n.$$

应选答案 (D)

错解分析： n 是方程的根，方程中未知数 x 都应用 n 代入，但代入错误地得 $n + mn + n = 0$ ，正确结果是 $n^2 + mn + n = 0$ 。