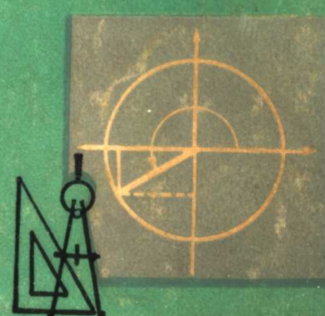
ZHONG XUE SHU XUE JING SAI
FU DAO JIANG ZUO
-FU 1979 NIAN JING SAI SHI TI

中学科技特辑

中学数学竞赛辅导讲座

——附 1979 年竞赛试题



上海教育出版社

中学数学竞赛辅导讲座

——附1979年竞赛试题

上海市数学会
《中学科技》编辑部 编

上海教育出版社

中学科技特辑

中学数学竞赛辅导讲座

——附1979年竞赛试题

上海市数学会
《中学科技》编辑部 编

上海教育出版社出版
(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16　印张 13　字数 312,000
1980年5月第1版　1980年5月第1次印刷
印数 1—150,000 本

统一书号：7150·2273　定价：0.92 元

前　言

这里刊印的十四篇数学讲座的讲稿是上海市数学会在1979年中学生数学竞赛前为部分准备参加竞赛的学生写成的.

本讲稿与中学数学教学内容相比,水平有所提高. 我们认为,一部分中学生在学习规定的中学数学教材内容以外,如果行有余力,应该让他们多学一点知识,开阔一点眼界,这对于巩固中学教学内容和今后进一步钻研数学是有利的. 从讲座的效果看, 这些讲稿的内容是能为学习成绩较优秀的学生所接受和欢迎的.

为了使更多的中学生和数学爱好者能从中受到教益, 我们将这些讲稿由原主讲人吸取各方面意见修改、补充后,汇编成册,印行问世.

本书附有1979年上海市及其他省市中学数学竞赛试题和参考题解答, 1979年全国中学生数学竞赛试题和解答. 此外还附有少量国外中学数学竞赛试题,一并供参考.

限于编者水平,本书不免有不妥或错误之处,希读者指正.

上海市数学会
《中学科技》编辑部
1980年4月

目　录

第一讲　和中学生谈谈怎样学好数学

上海中学　唐秀颍

数学是现代科学技术的基础学科之一，数学水平的高低将直接影响四个现代化的速度．为了帮助同学们学好数学，我在对 1977、1978 年高考，1978 年全国八省市数学竞赛和上海科技报征答活动中的情况作了些分析后，提出下面几个应注意的问题．

首先，要认真掌握基础知识．在中学阶段如何学好数学基础知识，这是一个根本问题．基础知识是数学学习的基本内容，它包含许多基本概念，基本法则和定理，它是同学赖以正确思维的基础，也是同学掌握知识技能、技巧的首要条件，在目前就是要学好代数、几何(包括平几、立几、解几)三角的传统内容，才有可能进一步学习高等数学，因此中学的数学也是基础的基础．我们必须把大纲规定的内容，包括习题，真正做到学得深刻，练得烂熟，也只有这样才能把知识转化为技能和熟练技巧，培养和发展自己的能力，如运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，从而提高自己分析问题和解决问题的能力．例如 1978 年全国八省市数学竞赛第一试第四题：把半径为 1 的四个小球叠成两层放在桌面上，下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度．

不少同学由于空间的线面关系和两两相切的概念比较清楚，他们很快抽象出一个正三棱锥，用正确迅速的计算，简练的数学语言把思考的结果表达出来，从而正确解决了从球顶到桌面的距离．

解　$\because$ 四小球两两相切，如设四小球的球心为 $O_i\,(i=1,2,3,4)$，

则
$$O_1O_2=O_1O_3=O_1O_4=O_2O_3=O_2O_4=O_3O_4=2.$$

$\therefore$ $O_1\text{-}O_2O_3O_4$ 可以看作一个棱长都是 2 的正三棱锥．(图 1-1)

过 O_1 作三棱锥的高 O_1K，则 K 应是 $\triangle O_2O_3O_4$ 的中心，连 O_2K，

$$\because\quad O_2T=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},\qquad \therefore\quad O_2K=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad O_1K=\sqrt{O_1O_2^2-O_2K^2}=\sqrt{4-\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

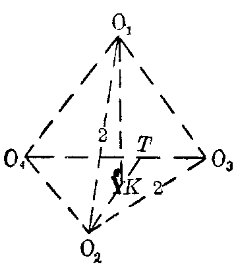


图　1-1

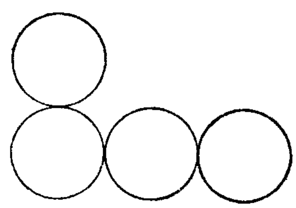


图　1-2

$$\therefore\quad 所求距离=O_1K+2=2+\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

但也有不少同学由于“两两相切”的概念不清，把四个小球摆成图 1-2 的样子，这必然抽象不出正确的图形，也就无法完成题目的解答。

又如：这次科技报征答题第六题，如图 1-3，“一个给定的凸五边形 $ABCDE$ 有下列性质：三角形 ABC、BCD、CDE、DEA、EAB 的面积都等于 1．证明每一个具有上述性质的不全同的五边形有相同的面积，且进而证明存在着无限个具有上述性质的不全同的五边形。”

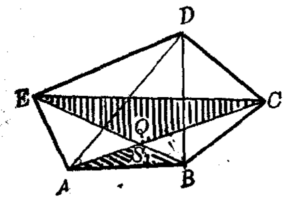


图 1-3

一般认为这道题的综合性、思考性比较强，但是只要熟练掌握和运用“平几”、“解几”、代数中的等积变换、相似三角形的性质，建立直角坐标系、斜率公式、三角形面积公式以及解方程等基础知识和基本技能，用“平几”或“解几”方法，就能达到证明题设中凸五边形的面积为定值的要求。

现在分别介绍应用“平几”和“解几”的基础知识，化繁为简，化难为易的解法，虽然方法是一般的，但思路是比较清晰的。

I．平几证法：

一、 $\because\ S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}=1,\quad \therefore\ EC\parallel AB.$

同理可证五边形 $ABCDE$ 中五条对角线分别与对边平行。

$$\because\ EB\parallel CD,\quad AC\parallel ED,\quad \therefore\ EDCQ 是平行四边形.$$

$$\therefore\ S_{\triangle ECQ}=S_{\triangle CDE}=1.$$

设 $S_{\triangle ABQ}=S_1$，则有

$$S_{ABCDE}=S_{\triangle ECQ}+S_{\triangle CDE}+S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ABC}-S_1=4-S_1. \tag{1}$$

又 $\because\ EC\parallel AB,\quad \therefore\ \triangle ECQ\backsim\triangle ABQ,\quad \therefore\ \dfrac{S_1}{S_{\triangle ECQ}}=\left(\dfrac{AQ}{QC}\right)^2.$

就是

$$S_1=\left(\frac{AQ}{QC}\right)^2. \tag{2}$$

又 $\because\ \dfrac{S_1}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AQ}{AC},\quad \therefore\ \dfrac{S_1}{S_{\triangle ABC}-S_1}=\dfrac{AQ}{AC-AQ},$

就是

$$\frac{S_1}{1-S_1}=\frac{AQ}{QC}. \tag{3}$$

从(2)、(3)，得 $S_1=\dfrac{S_1^2}{(1-S_1)^2},\quad \therefore\ S_1^2-3S_1+1=0,$

$$\therefore\ S_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.\quad \left(S_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}>1\ 舍去\right) \tag{4}$$

以(4)代入(1)，

$$S_{ABCDE}=4-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

$\therefore$ 每一个具有题述性质的凸多边形的面积都相同，且等于 $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

二、按下法可作出具有题述性质的凸五边形.

(1) 任作线段 $AB=a$, 并作 $\triangle ABC$ 使 $\angle B$ 为钝角, AB 边上的高为 $\frac{2}{a}$;

(2) 在 AC 上取 Q 点使 $AQ=\frac{3-\sqrt{5}}{2}AC$;

(3) 连接 BQ 并延长与过 C 点平行于 AB 的直线交于 E;

(4) 连接 AE, 过 E、C 分别作 AC、BE 的平行线交于 D.

从五边形 $ABCDE$ 的作图过程知道, 由 $AB=a$ 的任意性及 C 点在使 $\triangle ABC$ 的 AB 上高为 $\frac{2}{a}$ 条件下, 有无数种可能, 因此可以作出无限个上述的五边形.

下面证明这样的五边形有题述的性质:

证明 $\because AB=a$, AB 边上的高为 $\frac{2}{a}$, $\therefore S_{\triangle ABC}=1$;

$$\because EC\parallel AB, \quad \therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}=1, \ \triangle EQC\backsim\triangle ABQ.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EQC}}{S_{\triangle ABQ}}=\left(\frac{QC}{AQ}\right)^2=\left(\frac{AC-AQ}{AQ}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\right)^2.$$

而

$$\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AQ}{AC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABQ}=\frac{AQ}{AC}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \qquad \therefore S_{\triangle EQC}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}\right)^2=1.$$

$$\because DE\parallel AC, \quad DC\parallel EB,$$

$$\therefore S_{\triangle EDC}=S_{\triangle EQC}=1; \quad S_{\triangle EDA}=S_{\triangle EDC}=1; \quad S_{\triangle BCD}=S_{\triangle EDC}=1.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=S_{\triangle EDA}=S_{\triangle ABE}=1,$$

$\because EC\parallel AB$, $\quad \therefore \angle EAB=180^\circ-\angle AEC<180^\circ$,

$\quad\quad \therefore \angle ABC$ 是 $\triangle ABC$ 一内角, 一定小于 180°.

$\because CD\parallel BE$, $\quad \therefore \angle DCB=180^\circ-\angle CBE<180^\circ$.

$\because ED\parallel AC$,

$\therefore \angle DEA=180^\circ-\angle EAC<180^\circ$, $\angle EDC=180^\circ-\angle DEB<180^\circ$.

$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 一定是凸五边形.

$\therefore$ 具有题述性质的凸五边形有无限个.

II. 解几证法:

一、如图 1-4, 以凸五边形 $ABCDE$ 的 AB 边为 x 轴, 以 A 为原点建立直角坐标系, 且设 $AB=a$,

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}=1$, $\quad \therefore C$, E 两点的纵坐标为 $\frac{2}{a}$,

同时设 C 点横坐标为 b, E 点横坐标为 c, D 点的坐标为 (d, e).

就是 $A(0, 0)$、$B(a, 0)$、$C\left(b, \frac{2}{a}\right)$、$D(d, e)$、$E\left(c, \frac{2}{a}\right)$.

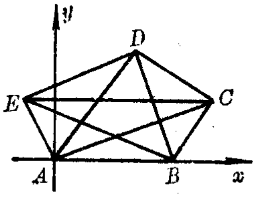


图 1-4

又 $\quad \because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=S_{\triangle DEA}=S_{\triangle EBA}=1$.

$$\therefore AD\parallel BC, \ AB\parallel EC, \ AE\parallel BD, \ DE\parallel AC, \ BE\parallel CD.$$

$$S_{ABCDE}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}=2+S_{\triangle ABD}=2+\frac{1}{2}a\cdot e.$$

$$\because\ DE\parallel AC,\qquad \therefore\ \frac{2}{a}:b=\left(e-\frac{2}{a}\right):(d-c);$$

$$EA\parallel BD,\qquad \therefore\ e:(d-a)=\frac{2}{a}:c,$$

$$BC\parallel DA,\qquad \therefore\ e:d=\frac{2}{a}:(b-a).$$

分别整理得

$$aeb+2(c-d-b)=0, \tag{1}$$

$$aec+2(a-d)=0, \tag{2}$$

$$ae(a-b)+2d=0. \tag{3}$$

(1)+(3) 得

$$a^2e+2(c-b)=0; \tag{4}$$

(2)+(3) 得

$$a^2e+ace-abe+2a=0,$$

即

$$ae+e(c-b)+2=0. \tag{5}$$

从 (4), (5) 中消去 $c-b$, 得

$$a^2e^2-2ae-4=0, \tag{6}$$

$$\therefore\ \left(\frac{ae}{2}\right)^2-\frac{ae}{2}-1=0.$$

解之, 得

$$\frac{ae}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.\quad（负值舍去）$$

$$\therefore\ S_{ABCDE}=2+\frac{1}{2}ae=2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{5+\sqrt{5}}{2},\quad（定值）$$

$\therefore$ 具有题述性质的凸五边形的面积都相同.

二、 将上面结果中的 a, b 设为任意给定的正实数,

则 $\because\ e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{a},\ d=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a),\ c=b-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a,$

$$\therefore\ 以\ A(0,\ 0)、B(a,\ 0)、C\left(b,\ \frac{2}{a}\right)、D\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a),\ \frac{\sqrt{5}+1}{a}\right]、$$

$$E\left(b-\frac{\sqrt{5}+1}{2}a,\ \frac{2}{a}\right)$$

为顶点的五边形 $ABCDE$ 对应于不同的正实数 a 与 b, 在直角坐标系里凸五边形 $ABCDE$ 具有无限多个且并不全同. 因此只须证明以 A、B、C、D、E 为顶点的凸五边形具有题述性质.

证明 显然 $AB\parallel CE$.

$$\because\ (b-a):\frac{2}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a):\frac{\sqrt{5}+1}{a},\qquad \therefore\ BC\parallel DA;$$

$$\because\ \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a)-b\right]:\left(\frac{\sqrt{5}+1}{a}-\frac{2}{a}\right)=\left(b-\frac{\sqrt{5}+1}{2}a-a\right):\frac{2}{a},$$

$\therefore\ CD\parallel EB$;

$$\because\ \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a)-\left(b-\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right)\right]:\left(\frac{\sqrt{5}+1}{a}-\frac{2}{a}\right)=b:\frac{2}{a},$$

$\therefore\ DE\parallel AC$;

$$\because\ \left[b-\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right]:\frac{2}{a}=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(b-a)-a\right]:\frac{\sqrt{5}+1}{a},$$

$$\therefore\ EA\parallel BD.$$

$$\because\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{a}=1,$$

由上诸式得 $$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=S_{\triangle DEA}=S_{\triangle EAB}=1.$$

∴ 具有题述性质的凸五边形 $ABCDE$ 有无限多个并不全同.

总之，从以上两种解答的过程中可以体会到，认真学好数学基础知识是很重要的，对于综合性或者思考性较强的数学题，纵然它所涉及的基础知识是多方面的，但有了扎实的基本功，就能有效地提高自己分析问题和解决问题的能力.

其次，要形数结合，开阔思路. 由于现代化科学技术不是孤立地研究一个个事物，一个个现象，而是研究事物现象的变化、发展过程，研究事物相互之间的关系；因此，在我们数学各分科之间就要经常注意相互间的沟通，也就是要求经常从形数结合方面来开阔我们的思路.

例如确定代数方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3, & (1)\\ x^2+y^2+z^2=3, & (2)\\ x^3+y^3+z^3=3 & (3)\end{cases}$$

的所有实数根. 则除去用韦达定理确定它的解以外，有的同学采用这样的解法：

解 方程组中的(1)可以写成

$$x+y+z-3=0,$$

或

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1.$$

它表示在三维坐标系 x、y、z 三轴上的截距都是三个单位的平面，而坐标原点 O 到平面(1)的距离：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

方程组中的(2)，表示以 $\sqrt{3}$ 为半径的球面.

很明显平面(1)与球面(2)只有一个交点(即平面(1)与球面(2)相切)，它的坐标为(1, 1, 1).

∴ 方程组(1)、(2)的实数解只有 $x=y=z=1$. 用此解代入方程组中的(3)，适合. ∴ 曲面 $x^3+y^3+z^3=3$ 经过平面与球面的交点(1, 1, 1)，也就是原方程组的实数解为 $x=y=z=1$.

以上解法用到了立体解析几何的知识，不过也应注意这种解法有局限性，只有在所给方程组比较特殊的情况下，才可能得解.

三、要一题多解，灵活运用. 通过一题多解，既能广泛地综合运用基础识知，提高基本技能，又能更有效地发展逻辑思维，提高全面分析问题的能力，找到最合理最简捷的解题途径，从而增强学习兴趣，自觉地形成刻苦钻研的学习方法和学习习惯. 因此它是值得我们提倡的.

例如，科技报征答题中的第三题：

a、b、c 为三角形的三边，S 为面积，证明 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S$，等号在什么条件下成立？

一般同学都用"$A-B\geqslant 0$，则 $A\geqslant B$"来证明：

证明 $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\,S=a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C)-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C$

$$=2[a^2+b^2-ab(\cos C+\sqrt{3}\sin C)]=2\left[a^2+b^2-2ab\left(\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right]$$

$$=2[a^2+b^2-2ab\sin(C+30^\circ)]\geqslant 2[a^2+b^2-2ab]=2(a-b)^2\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

等号仅在
$$\begin{cases}\sin(C+30^\circ)=1,\\ a=b\end{cases}$$
时成立，即 $C=60^\circ$，$a=b$. 也就是 $\triangle ABC$ 为正三角形时才成立.

不少同学都获得了两、三种证法，有一个 15 岁的小同学还在自学解析几何的基础上，增加了解几证法：

如图 1-5，设 A、B、C 三点坐标分别为 $A(-m,\ 0)$、$B(m,\ 0)$、$C(p,\ q)$，则三边的关系式为

$$a^2=(p-m)^2+q^2=p^2+q^2+m^2-2pm,$$
$$b^2=(p+m)^2+q^2=p^2+q^2+m^2+2pm,$$
$$c^2=4m^2,$$
$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2=2p^2+2q^2+6m^2.$$

$$\because\quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-m & 0 & 1\\ m & 0 & 1\\ p & q & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(mq+mq)=mq,\qquad \therefore\quad 4S\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,mq.$$

$$\because\quad a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\,S=2p^2+2q^2+6m^2-4\sqrt{3}\,mq=2p^2+2(q-\sqrt{3}\,m)^2\geqslant 0,$$
$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

当 $p=0$，$q=\sqrt{3}\,m$ 时，就是 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，等号成立.

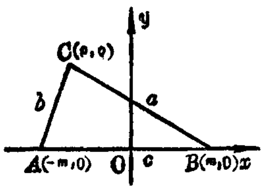


图 1-5

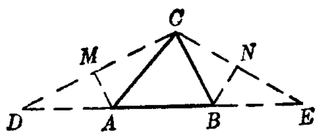


图 1-6

又例如：在 $\triangle ABC$ 中证明 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

一般同学都用三角形中三内角之和为 180° 以及和差化积加以证明，证法如下：

$$\because\quad \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{180^\circ-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

也有同学借助几何，利用整角和半角的关系以及三角形内的边角关系来证明：

证明 如图 1-6，延长 BA 到 D 使 $DA=AC$.

延长 AB 到 E 使 $BE=BC$.

连结 CD、CE 并分别作 $AM\perp CD$，垂足为 M；$BN\perp CE$，垂足为 N.

$\because\ AD=AC,\ BE=BC,\quad \therefore\ \angle D=\frac{1}{2}\angle A,\ \angle E=\frac{1}{2}\angle B,$

且
$$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\angle C=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C.$$

如果 R 表示 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，根据正弦定理

$$AD=AC=2R\sin B,\ AB=2R\sin C,\ BE=BC=2R\sin A,$$

$$\therefore\quad DE=2R(\sin A+\sin B+\sin C).$$

又在 $\triangle DCE$ 中：

$$\frac{CE}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{DE}{\sin\angle DCE},$$

$$DE=\frac{CE\sin\angle DCE}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{CE\sin\left(90^\circ+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}=CE\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=2EN\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=2BE\cos\frac{B}{2}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=4R\sin A\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{A}{2}$$

$$=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

$$\therefore\quad 2R(\sin A+\sin B+\sin C)=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\therefore\quad \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

又例如求解

$$\sin x+\cos x=1-\frac{1}{2}\sin 2x.$$

有的同学采用置换的办法，把问题转化为代数问题来解决。

解 用 $\begin{cases}\sin x=a,\ \cos x=b,\\ a^2+b^2=1\end{cases}$ 置换，方程变为

$$\begin{cases}a+b=1-ab, & (1)\\ a^2+b^2=1. & (2)\end{cases}$$

$(2)+(1)\times 2$：
$$a^2+b^2+2(a+b)=1+2(1-ab),$$

即
$$(a+b)^2+2(a+b)-3=0,$$

得
$$a+b=1;\quad a+b=-3.\quad (\text{不合要求})$$

再把 $a+b=1$ 代入(1)，可得 $\begin{cases}a+b=1,\\ ab=0,\end{cases}$ 从而应有

$$\begin{cases}a=0,\\ b=1,\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$$

由 $\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=1,\end{cases}$ 得 $x=2n\pi$; 由 $\begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x=0,\end{cases}$ 得 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$. (n 为整数)

当然，特殊问题可以特殊处理，这个题也可这样去置换：设 $\sin x+\cos x=t$，两边平方得 $1+\sin 2x=t^2$，即 $\sin 2x=t^2-1$，于是原方程变成：

$$t=1-\frac{t^2-1}{2}.$$

解之可得 $t=1$(另一解 $t=-3$ 不合要求). 下面求解 $\sin x+\cos x=1$，可化得

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \therefore \quad x-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

从而得 $$x=2n\pi \quad 及 \quad x=2n\pi+\frac{\pi}{2}. \quad (n\ 为整数)$$

从以上各例清楚地看到经常锻炼自己在解题时应用学过的有关知识，探索一题多解，就会使学过的知识更能综合运用、融会贯通；也只有掌握各分科的基础知识越多，理解越深刻，才能相应地使自己的解题方法更多、更灵活，更能找到最简捷的解题途径.

四、要理论联系实际，培养独立思考能力. 无数事实表明，数学的发展是与当时当地的生产力息息相关的，学习数学不应该把自己困守在数学的圈子里. 在今天要学好数学，就需要注意到其它自然科学和尖端技术的发展，这才不致使我们的学习变成无源之水，何况自然学科，包括数学，都是从实践到理论到再实践的过程中发展起来的. 数学作为一个独立学科，有它本身的规律性，但是数学以外的天地更是广阔无边的，千百万劳动人民在生产斗争中积累起来的宝贵经验，是我们最好的学习内容. 我们应从生活实践中去吸取有益的材料，这是一个真正的用之不尽的源泉，也就是要坚持理论联系实际，把学习数学知识技能和伟大的社会主义革命和建设事业紧密结合起来.

总之，为了学好中学数学，就要掌握基础，发展能力；就要形数结合，开阔思路；就要一题多解，灵活运用；就要理论联系实际，培养独立思考能力，这是十分重要的！但是对我们广大的在校的中学同学来说，还应当首先做到下列各点：

第一，务必上好正课，循序渐进

循序渐进就是要求我们对学习的内容由浅入深一步步地学习，把不清楚的东西弄清楚，然后再学习新的内容，也就是逐步打好基础. 这就要求同学必须上好正课，细心听讲，在老师的启发引导下逐步掌握基础知识，再通过练习加深理解，灵活运用. 如果在掌握过程中遇到困难，必须加强思考，认真解决，不能解决时再请老师加以指引，及时扫清前进道路上的拦路虎.

第二，务必做好预习、复习、练习的工作，找出规律

课前预习课文是很好的锻炼，这样，在听课时就能做到心中有数，有利于及时理解讲课的内容. 在预习中有不理解的地方，应做出记号，以便上课时重点听取老师的解释或提出问题，加以澄清，求得当堂巩固. 课后复习课文是在老师讲课的基础上进行的，应逐步做到用自己的语言把学过的内容重新组织，变成自己解决问题的工具. 课后练习主要是加深对基本概念、定义和定理的理解，在做到知其然并知其所以然的同时，培养自己正确、合理、迅速的运算技能和一定的逻辑思维能力、空间想象能力. 因此在完成练习后必须随时归纳所用的知识和解题的方法. 这样持之以恒，必定能够找出学习数学的规律，不断提高数学学习的质量. 特别要注意以下几点：

(1) 每次练习必须养成先复习后做作业的良好习惯，在练习过程中不再东翻西查学习的

内容，以便集中精力思考解题路线和方法.

(2) 每次练习必须认真审题而后动笔　在拿到一道题目时，一定先分析哪些是已知的，哪些是未知的，要求算还是证，然后扣住题目所给的条件进行分析、作答. 例如在78年全国八省市竞赛第一试的第8题中就清楚地反映了这个问题. 题目是:

证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半.

答得好的同学就在于审题周密. 对锐角三角形中的“锐角”两字紧紧抓住，就得到了 $A+B>90°$，$A>90°-B$，从而得到 $\cos A<\sin B$. 同理，$\cos B<\sin C$，$\cos C<\sin A$ 再结合正弦定理的应用，圆满解决了这道题. 但在没有答对的试卷里，只看到他们在那里盲目地用三角公式推算，而把题中的“锐角”这个已知条件给忽略了；甚至当他们做不下去的时候，还是没有想到用题目中所给的已知条件. 这里关键的一步在于考虑到 $A+B>90°$，如果 $A+B$ 不大于 $90°$，那么 $A+B=90°$ 或 $A+B<90°$，这时 C 必然是直角或钝角，与已知条件不相符合. 没有这一步的分析就不能得出上面三个不等式，也就不可能由此得出最后的结论，因此细致审题是十分重要的一步.

(3) 每次练习必须严格做到书写整洁，一丝不苟. 因为这不仅仅是形式上的整洁，更是思想上的简练、思路上的严密，这一点经常为同学们所忽视，必须引起注意. 在科技报征答题第五题中不少同学或用直接证法或用反证法加以证明，方法比较多而好，但有一个同学尽管证法一般，但他写得步骤清晰，书写整洁，一目了然，基本功十分可喜. 问题如下:

已知在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AC=BD$，$AD=BC$，求证这个四面体的面是锐角三角形. (见图 1-7)

证明　四面体 $ABCD$ 中设 $AB=CD=a$，$AC=BD=b$，$AD=BC=c$. 四面体 $ABCD$ 的四个面都是三角形，每个三角形的三条边长分别为 a, b, c. 那么，这四个三角形是全等三角形.

又设边 a, b 的夹角是 α,

边 b, c 的夹角是 β,

边 c, a 的夹角是 γ,

则
$$\alpha+\beta+\gamma=180°.$$

∵ 过四面体的任一顶点的三棱两两所成的角为 α、β、γ,

$$\therefore\quad \alpha+\beta>\gamma,\ \beta+\gamma>\alpha,\ \alpha+\gamma>\beta.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma>2\gamma,\ \alpha+\beta+\gamma>2\alpha,\ \alpha+\beta+\gamma>2\beta.$$

$$\because\quad \alpha+\beta+\gamma=180°,\qquad \therefore\quad \alpha<90°,\ \beta<90°,\ \gamma<90°.$$

∴ 四面体四个面(四个三角形)都是锐角三角形.

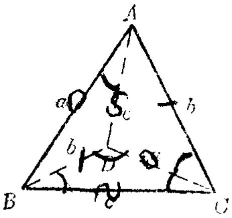


图 1-7

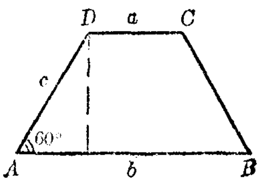


图 1-8

第三，积极创造条件参加学校建立的数学课外小组，扩大知识领域，提高学习数学的兴趣. 在高考中，在征答题中不少同学通过自学，在解题上运用了高等数学的知识解决了问题.

例如：如图1-8，已知等腰梯形周长为60，底角为60°，问这梯形各边长为多少时面积最大。

这题最合理的解法是利用"两正数和是定值，则当两数相等时积最大"来求解，既避免了冗长的数字计算，又减少了运算的步骤．

解 设等腰梯形上、下底为 a, b 腰为 c,

$$\text{高 } h=c\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}c,\qquad \text{面积 } S=\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{\sqrt{3}}{8}(a+b)\cdot 2c.$$

$$\because\quad (a+b)+2c=60\text{——定值},$$

$\therefore$ 当 $a+b=2c=30$ 时，$(a+b)\cdot 2c$ 有最大值，也即 S 有最大值：

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\times 30\times 30=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 225.$$

又 $$\because\quad \frac{b-a}{2}=c\cos 60^\circ=\frac{c}{2},\qquad \therefore\quad b-a=c.$$

于是可以求得 $a=7.5$, $b=22.5$, $c=15$. 此时面积最大．

有不少同学在自学的基础上，掌握了梯形面积关系式 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}c(60-2c)$ 后，用导数 S' 为零，决定 c，再用 $S''<0$ 判定最大值，也是非常简洁的．

因此，在课外数学小组中学习研究一些有高等数学为背景，但可用初等数学的方法加以解决的问题，这对于"双基"的灵活运用，提高能力，扩大视野，是十分有益的．

第四，要相互探讨，共同提高．

为了更好学习，我们一定要在独立思考、独立钻研的基础上，适当开展同学间的讨论和交流心得，以集体智慧来武装自己，取长补短，开阔思路，把数学学得多一点、好一点，进一步提高学习的质量，使我们真正成为攀登科学高峰的后备军．今天的中学生，明天将成为新长征中勇往直前的英雄战士！

作为这次讲座的结束，下面提几个问题供同学们练习．

练 习 题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$（用几何方法解三角问题）．

2. 如果 $3x+4y=25$，求 x^2+y^2 的最小值（用几何方法解代数问题）．

3. 解方程 $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$（用三角方法解代数问题）．

4. 解方程 $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}=2$（用代数方法解三角问题）

比较(1)万能置换法和(2) $\begin{cases}\sin x=a,\ \cos x=b,\\ a^2+b^2=1\end{cases}$ 两种解法

5. 如图1-9，已知 $ABCD$ 为正方形，在 BC 上任取一点 E，AF 平分 $\angle DAE$ 交 CD 于 F，求证 $AE=BE+DF$（三角方法解几何问题）．

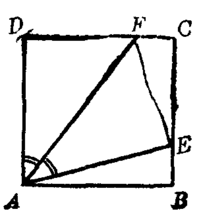


图 1-9

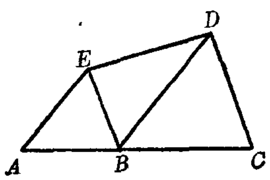


图 1-10

6. 如图 1-10，已知：$AE \parallel BD$，$BE \parallel CD$，S_1 为 $\triangle ABE$ 的面积，S_2 为 $\triangle BCD$ 的面积，S 为 $\triangle BDE$ 的面积.

求证：$S^2 = S_1 \cdot S_2$.（一题两解）

7. 已知 α，β 为锐角且

$$\begin{cases} 3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1, & (1) \\ 3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0. & (2) \end{cases}$$

求证：$\alpha + 2\beta = \dfrac{\pi}{2}$.（一题两解）

注：此题系 1978 年全国高等学校统一招生题.

8. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点的坐标为 $A(-2, 0)$ 和 $B(0, -2)$，第三个顶点 C 在抛物线 $y = x^2 + 1$ 上移动，求这个三角形重心的轨迹方程.

第二讲　解数学题的思考方法

上海师范大学　田万海

解题时从题中的已知条件推演出要求的结果，首先应有充分的根据．学过的定义、公理、法则、公式和定理都可以作为解题的根据．同时，由于解题的根据不同，对同一道题有时又可作出多种解法．因此，牢固掌握基础知识是正确、灵活解题的一个重要因素．下面举几个例子来说明．

［例 1］　解不等式

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{1-t^2}{1+t^2}>0. \tag{1}$$

依据不等式的性质有

解法一　(1)同解于

$$t\sqrt{1+t^2}>t^2-1. \tag{2}$$

1．$t>0$,

当 $t^2-1>0$ 时，(2)平方得 $t>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $t<-\frac{\sqrt{3}}{3}$,　　$\therefore\ t>1$;

当 $t^2-1\leqslant 0$ 时，(2)恒成立，　　$\therefore\ 0<t\leqslant 1$.

2．$t<0$,

当 $t^2-1\geqslant 0$ 时，(2)不成立；

当 $t^2-1<0$ 时，(2)平方得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$,　　$\therefore\ -\frac{\sqrt{3}}{3}<t<0$.

3．$t=0$, (2)恒成立．

由 1、2、3、知 (1) 的解为 $t>-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

考察(1)的特点，施行三角代换，根据三角公式和三角函数的单调性有

解法二　设 $\theta=\operatorname{arc\,tg} t$, 则 $t=\operatorname{tg}\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, 代入(1)得

$$\sin\theta+\cos 2\theta>0, \tag{3}$$

即

$$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0,$$

于是

$$-\frac{1}{2}<\sin\theta<1.$$

在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内，上面不等式的解为 $-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore\ t=\operatorname{tg}\theta>-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$