ZhXShX

中学数学丛书

王三年 张景陶

排列组合与二项式定理

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

排列组合与二项式定理

王三年　张景陶

湖 北 教 育 出 版 社

内 容 提 要

全书共分三章，比较系统地讲解了排列、组合及二项式定理的基本知识。内容在中学教材的基础上适当作了拓宽加深.

本书叙述文字比较详细，内容由浅入深，循序渐进，习题附有答案或必要的提示，适应中学生课外阅读，亦可供中学教师教学参考。

中学数学丛书

排列组合与二项式定理

王三年　张景陶

湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行

黄冈报印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　6.625印张　1插页　151,000字

1984年9月第1版　1984年9月第1次印刷

印数：1—33,400

统一书号：7306·53　定价：0.87 元

编者的话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识，这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》，根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上编一套《中学数学丛书》。我们认为这个工作是很有意义的，于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套书的同时，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师，编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数

学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

前　言

本书是从中学数学大纲和全国中学数学通用教材为依据，把知识面适当地加宽、加深，着眼于帮助学生深刻理解大纲和教材规定的基础知识，熟练掌握基本技能，开阔视野，增强分析问题和解决问题的能力．

在编写过程中，我们坚持了理论联系实际的原则，注意从实际问题出发，进行科学的抽象和必要的逻辑推理，得出数学的概念和规律，力求避免从概念到概念，从抽象到抽象的写作方法。从文字叙述上也力求深入浅出，通俗易懂，使一般水平的中学生都能看懂，也兼顾了其他自学青年．

本书除了收入适量例题外，还选编了有代表性的习题，并附有习题解答或提示，以便读者参考．

本书完成初稿后，承蒙武汉大学张远达教授在百忙中为我们审稿，对原稿提出了宝贵的意见．我们谨在此表示衷心的感谢．

由于时间匆促，经验有限，编写中一定会存在不少缺点．敬请读者批评指正．

编　者

1983年2月

目　录

第一章　排　　列

排列、组合是中学数学的重要内容之一，在中学数学教材中具有特殊的地位。它内容独特，自成体系，题目多变，思维抽象，不容易理解和运用，它的思考方法难于掌握，解题得数往往较大，不便于用直观的方法来检验。是中学数学教学中的一个难点。它在生产和科学研究中有着重要的作用。例如，物资的调配、人力的安排，乃至运动会场次的计算等等都离不开它。此外，它也是学习高等数学的基础，例如，高等代数中行列式，抽象代数中置换群，微积分中e的定义，概率论与数理统计中的古典概率等等都要用到它，特别是近些年来，数学的一个新分支——组合数学，它是在排列、组合的基础上直接发展起来的。

排列与组合的基本思想是组合分析中的两条原理：乘法原理和加法原理。这两条原理是推导排列、组合数的计算公式以及解排列、组合应用题的基础。因此，如果能比较深刻地理解乘法原理与加法原理，对学好排列、组合会有好处的。

§1. 两个基本原理

（一）乘法原理

先看下面的问题：

问题1　要由4名男选手a、b、c、d和3名女选手p、q、r中男女各选1名组成网球队，求组队方法的总数。

解： 上面所求的组队方法的总数，等于由两个集合：

$$A=\{a, b, c, d\},$$
$$B=\{p, q, r\}$$

中各选一个元素拼组的个数，将这些组全部列出如下表所示：

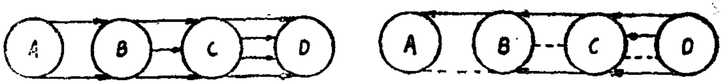
(a, p)	(a, q)	(a, r)
(b, p)	(b, q)	(b, r)
(c, p)	(c, q)	(c, r)
(d, p)	(d, q)	(d, r)

（集合A的元素的个数）×（集合B的元素的个数）$=4\times3=12$（种）。

问题2 某人从A地到D地，须经过B地和C地，从A地到B地有两条路，B地到C地有三条路，C地到D地有四条路可走。问

（1）从A地到D地的走法有几种？

（2）返回时不经原路有几种方法？



解：（1）从A地到B地有两种走法，到B地后，又各有三种走法到C地，由此可知，从A地到C地就有六种走法，到C地后，又各有四种走法到D地，所以，从A地到D地的走法是A地到B地，B地到C地与C地到D地的走法之积。

$$2\times3\times4=24\text{（种）}.$$

（2）返回时，不走原路，那么由D地到C地只有三种走

法，由C地到B地只有两种走法，由B地到A地只有一种走法。因此，返回时的走法共有

$$3\times2\times1=6（种）.$$

由以上问题可归纳出如下原理：

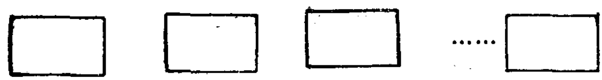
乘法原理　一件事须依次分S步才能完成，若完成第一步有n_1种方法，完成第二步有n_2种方法，……，完成第S步有n_s种方法，只有依次完成这S步之后，这件事才算最后完成，那么完成这件事总共有

$$N=n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_s$$

种不同的方法.

乘法原理可以形象地表述为占位置的方法，即把完成一件事的S步，形象地表示成S个位置：

第1位置　　第2位置　　第3位置　　……第S位置



n_1种可能　　n_2种可能　　n_3种可能　　……n_s种可能

于是问题转化为：占第1个位置共有n_1种方法，占第2个位置共有n_2种方法，……，占第S个位置共有n_s种方法，当每一个位置都占好后，才算完成了这件事，那么完成这件事，共有

$$N=n_1\cdot n_2\cdot\cdots\cdot n_s$$

种不同的方法。

下面举例说明乘法原理的应用：

例1　某电视机厂用2种不同显像管，3种不同外壳，2种不同天线，装配电视机，问一共可装出多少种电视机.

解：所谓不同，是指显像管、外壳、天线三者之中有一种不同，就算不同，因而我们可以直观地设想为三个位置，并且

2种可能　　3种可能　　2种可能

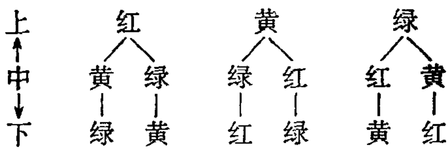
根据题意，指出了占每一种位置的可能性，从而不同的种数为

$$N=2\cdot3\cdot2=12（种）.$$

例2　用三面不同颜色的旗，按不同的次序挂在旗杆上表示信号，一共可以得到几种不同的信号？

解：设有红、黄、绿三种颜色的旗，按上、中、下三个位置挂在旗杆上表示信号。

挂在上面的旗，可以在三种颜色中任选一种，有三种方法，上面的旗选定后，中间的旗只能在剩下的两种颜色中选一种，有两种方法，上、中二旗选定后，最后剩下只有一种颜色的旗，挂在下面，有一种方法，由乘法原理得到：$N=3\times2\times1=6$种不同的信号。如下图：



例3　用0、1、2、3这四个数字可以组成多少个没有重复数字的四位数。

解：由题意0不能作首位数，因此，第1位数只能在1、2、3三个数字中选取，有3种选法。第1位数取定之后，第2位数可以在其余3个数字中任意选取，亦有3种取法。第1、2位数取定之后，第3位数只能在剩下的2个数字中选取，有2种取法，第1、2、3位数取定之后只剩下一个数字，第4位数就只能有1种取法。由乘法原理可得所求的四位数的个数是：

$$N=3\times3\times2\times1=18(\text{个}).$$

这里必须指出，乘法原理只适用于有顺序的问题，比如"从3人中选2个代表，有多少不同的选法？"显见，正确答案应是3种。但如用下述方法求解则不对。选2个代表分2步完成：①3人中选1个代表，有3种选法；②在余下的2人中再选1个代表，有2种选法。由乘法原理，共计有$3\times2=6$种选法。错误在于应用乘法原理实际上已将选出的代表排了顺序，而实际上代表间平等，无顺序可言。如问题改为"3人中选2人分别担任不同的职务"，则可按上法得选法数是6，因为"不同的职务"代表顺序。

1) 2)

由上可见，应用乘法原理时，问题必须有顺序可言，且此顺序正好对应于原事件分解成依次完成的事件的顺序。对每一个具体的问题，都有其具体的顺序，一个问题中的顺序常是人为的，哪一个放在前，哪一个放在后，并不是绝对的。同时，一件事分成几步完成也因问题而异，有的分细些好，有时一眼即明，分粗一些即可。熟练以后，常可几步并成一步完成。

例4 一个学生要从2本不同的政治书、3本不同的文艺书、2本不同的科技书里各选取1本，共有多少种不同的选法？

解： 用a_1，a_2代替2本政治书，用b_1，b_2，b_3代替3本文艺书，用c_1，c_2代替2本科技书，这里，选取一本政治书的方法有2种，就是：选a_1和选a_2；而选好一本政治书以后再选取一本文艺书的方法有3种，就是：选b_1选b_2和选b_3，所以，选取一本政治书，一本文艺书的方法就有$2\times3=6$（种），就是：

$$a_1b_1;\ a_1b_2;\ a_1b_3;\ a_2b_1;\ a_2b_2;\ a_2b_3.$$

同理，可以说明选取一本政治书、一本文艺书、一本科技书的方法共有$6\times2=12$（种），就是：

$a_1b_1c_1$; $a_1b_2c_1$; $a_1b_3c_1$; $a_2b_1c_1$; $a_2b_2c_1$; $a_2b_3c_1$;
$a_1b_1c_2$; $a_1b_2c_2$; $a_1b_3c_2$; $a_2b_1c_2$; $a_2b_2c_2$; $a_2b_3c_2$.

上面这个解法的思考过程如果用下面的图表表示出来，就可以更清楚地看出为什么要用乘法原理来计算了。

$$
\begin{array}{l}
a_1 — \begin{cases} a_1b_1 — \begin{cases} a_1b_1c_1 \\ a_1b_1c_2 \end{cases} \\ a_1b_2 — \begin{cases} a_1b_2c_1 \\ a_1b_2c_2 \end{cases} \\ a_1b_3 — \begin{cases} a_1b_3c_1 \\ a_1b_3c_2 \end{cases} \end{cases} \\
a_2 — \begin{cases} a_2b_1 — \begin{cases} a_2b_1c_1 \\ a_2b_1c_2 \end{cases} \\ a_2b_2 — \begin{cases} a_2b_2c_1 \\ a_2b_2c_2 \end{cases} \\ a_2b_3 — \begin{cases} a_2b_3c \\ a_2b_3c_2 \end{cases} \end{cases}
\end{array}
$$

$$2 \qquad 2\times3 \qquad 2\times3\times2=12$$

（二）加法原理

先看下面的问题：

问题3　某人要到甲地去，可以乘火车，可以乘汽车，也可以乘轮船。一天中，火车有5班，汽车有2班，轮船有3班，乘坐不同班的车或船，到甲地共有几种走法？

解：因为乘火车可以直达，火车有5班，故乘火车有5种走

法．同样，乘汽车有2种走法，乘轮船有3种走法．因此，他到甲地的走法是乘火车、汽车与轮船的走法的和。即

$$5+2+3=10（种）.$$

问题4 有红、黄、蓝三种颜色小旗各一面，用作信号，总共可以作出多少种不同的信号？

解：这个问题可以这样考虑．作出的信号按所用小旗的面数可以分成如下的三类：

1）只用一面小旗的，这样作出的信号有3种；

2）用二面小旗的，这样作出的信号有6种；

3）三面小旗都用的，这样作出的信号有6种．

因为上面这三类信号都不相同，并且除此之外不再有其他不同的信号可作．因此总共可作出的不同信号，应该是这三类方法所作出的各种信号的和，因此得

$$3+6+6=15（种）不同的信号.$$

由以上问题可以归纳如下原理：

加法原理　做一件事，完成它可以有S类办法，在第一类办法中有n_1种方法，在第二类办法中有n_2种方法，……，在第S类办法中有n_s类方法，若任两类办法是互斥的，则完成这件事共有

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_s$$

种不同的方法．

这里要指出：应用加法原理的条件是：进行分类时，要求各类办法彼此互斥，没有这个条件，是不能应用加法原理的．例如，找1—10中的所有合数．第一类办法是找含有2的合数，有4个，第二类办法是找含有3的合数，有2个，第三类办法是找含有5的合数，有1个．但是共有的合数是：4、6、8、9、10五个数，而不是N＝4＋2＋1＝7（个）．

下面举例说明加法原理的应用。

例5 从3、5、7、11、13、17这6个数中，取两数作成假分数，这样的假分数有多少个？

解：将这样的假分数分成分别以这6个数作分母的六类，考虑每一类的这样的假分数的个数，因这6个数是从小到大顺序排列的．故

以3作分母的这样的假分数有6－1＝5（个）；

以5作分母的这样的假分数有6－2＝4（个）；

以7作分母的这样的假分数有6－3＝3（个）；

以11作分母的这样的假分数有6－4＝2（个）；

以13作分母的这样的假分数有6－5＝1（个）；

以17作分母的这样的假分数有6－6＝0（个）。

因此，由加法原理知，这样的假分数共有

$$5+4+3+2+1+0=15\text{（个）}.$$

例6 3570有多少个不同的偶数因数？

解： $3570=2\times3\times5\times7\times17$.

从2、3、5、7、17中选一个偶数因数只有1个，

由2与3，5，7，17中的每一个相乘作成的偶数因数有4个，

由3，5，7，17中每次取二个与2相乘作成的偶数因数有6个，

由3，5，7，17中每次取三个与2相乘作成的偶数因数有4个，

由3，5，7，17中取四个与2相乘作成的偶数因数有1个。

因此 3570共有偶数因数

$$1+4+6+4+1=16\text{（个）}.$$

由上，可以看出，这两个原理有一个共同点，那就是都把一个原事件分解成若干个分事件来进行计算。如果每个分事件完成了，原事件就算全部完成了的话，那么可以断定应该用加法原理，换句话说就是完成原事件的方法数等于完成各分事件的方法数之和。还有一种情况，就是每个分事件的完成，并不是原事件全部完成，只是完成其中某一步，那么这时就要用乘法原理，即完成原事件的方法数等于完成各步分事件方法数之积。

用形象的语言说，乘法原理相应于“串联”过程，加法原理相应于“并联”过程。原则上说，任何一个复杂的事情，总可以用这两个原理分解成一些简单事情的“串联”或“并联”。在解题中，应该灵活地运用这两条原理，这里要指出：有些题既可以用乘法原理去解，也可以用加法原理去解。下面看两个例子。

用加法原理解例3：

因为千位数不能是零，零在末位的四位数有6个，这些数是符合要求的一部分，另外零在百位或十位上的四位数也各为6个，因此，我们得到所求的四位数一共有

$$6+6+6=18（个）。$$

用乘法原理解例5：

作成这样的假分数可以分两步来完成。第一步，于给定的6个数中任取2个数；第二步，用这两个数中的大数作分子，小数作分母，作成假分数。完成第一步方法可以这样计算：取第一个数的方法有6种，取完第一个数后，再取第二个数的方法有5种，由乘法原理知，在6个数中取两个数排列的方法有$6\times5=30$（种），但两个数中取两个数不计排法只有1种方法，计排法就有两种方法，由此可知，完成第一步的方法有$30\div2=$