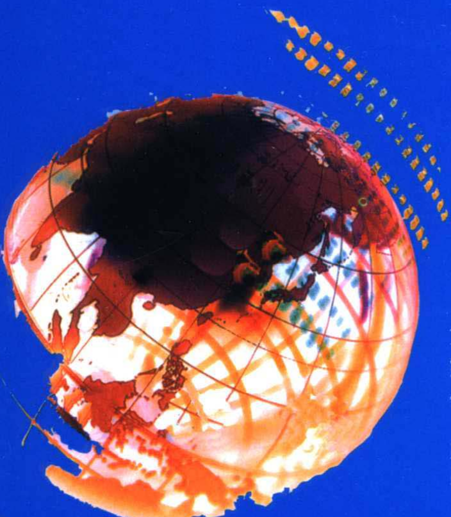
高三年级

总主编 单墫 熊斌

奥数教程



余红兵 编著

华东师范大学出版社

总主编 单 墫 熊 斌

奥数教程

（第三版）

·高三年级·

余红兵 编著

华 东 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程·高三年级/余红兵编著 —上海:华东师范大学出版社,2003.5
ISBN 7-5617-2349-0

Ⅰ.奥… Ⅱ.余… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 66417 号

奥数教程·高三年级·
(第三版)

总 主 编 单 墫 熊 斌
编　　著 余红兵
策划组稿 倪 明
责任编辑 审校部编辑工作组
特约编辑 周 珺
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话 上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893
业务传真 021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址 上海市中山北路 3663 号
邮编 200062

印 刷 者 华东师范大学印刷厂
开　　本 890×1240 32 开
印　　张 8.5
字　　数 251 千字
版　　次 2006 年 1 月第 3 版
印　　次 2006 年 1 月第 10 次
书　　号 ISBN 7-5617-2349-0/G·1100
定　　价 11.00 元

出 版 人 朱杰人

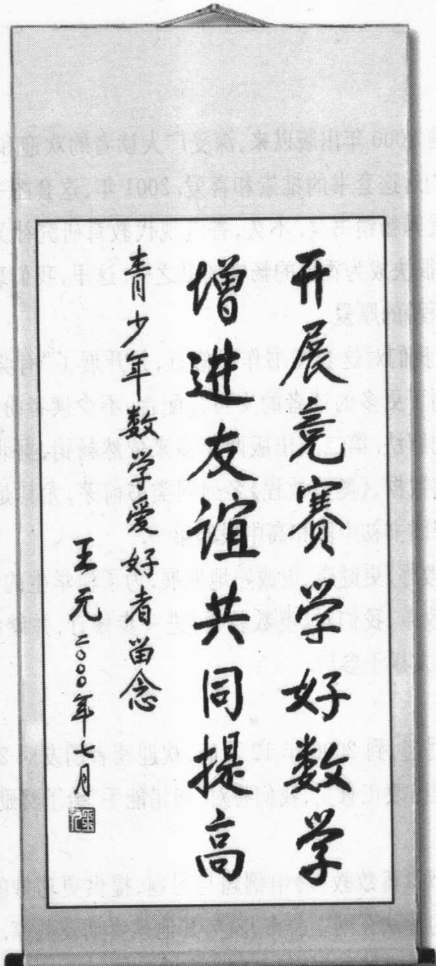
(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部或电话 021-62869887 联系)

本 书 荣 获

第十届全国教育图书展

优秀畅销图书奖

余红兵 苏州大学数学科学学院教授，理学博士．主要研究方向是数论，并长期有兴趣于数学普及工作，著作主要有《不定方程》、《数学竞赛中的数论问题》、《构造法解题》、《组合几何》等．



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥
林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”. 但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好. 的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余).

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”. 但外国人，一学乘法，头就大了. 不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率 $\pi = 3.14159\cdots$. 背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了. 可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个，……要背 π 先背诗，我们看来简直自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色. 从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生学习兴趣，启迪学生智慧. 例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚?”

外国人多半只会列方程解. 中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数. 小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头. 恰好与总体的平均数相等. 所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100 \div (3+1) = 25$ 人.

中国人善于计算，尤其善于心算.古代还有人会用手指计算(所谓“掐指一算”).同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理，在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算，我国有不少论著)，比希腊人稍逊一筹.但是，中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受，但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明.从1986年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来，中国队已经获得了11次团体冠军.成绩骄人.当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏.他说“今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一.……去年也是第一名.”(陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演“怎样把中国建为数学大国”)

陈省身先生还预言:“中国将在21世纪成为数学大国.”

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书，目的就是:(1)进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩;(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法.

“天下大事，必作于细.”我们希望，而且相信，这套丛书的出版，在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用.本丛书初版于2000年，2003年修订过一次，现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词，我们表示衷心的感谢.还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生，没有他们，这套丛书不会是现在这个样子.

单 墫 熊 斌

2005年11月

目　　录

基础篇

第 1 讲　排列与组合 …… 1
第 2 讲　二项式系数 …… 9
第 3 讲　计数:对应与递推 …… 20
第 4 讲　计数:容斥原理 …… 29
第 5 讲　数的整除 …… 38
第 6 讲　素数 …… 50
第 7 讲　同余(一) …… 60
第 8 讲　不定方程(一) …… 71
第 9 讲　多项式的整除 …… 81
第 10 讲　多项式的零点 …… 93
第 11 讲　整系数多项式 …… 106
第 12 讲　多项式的插值与差分 …… 115

提高篇

第 13 讲　单位根及其应用 …… 127
第 14 讲　生成函数方法 …… 136
第 15 讲　集合与子集族 …… 148
第 16 讲　图论问题 …… 159
第 17 讲　同余(二) …… 169
第 18 讲　不定方程(二) …… 177
第 19 讲　组合问题 …… 186
第 20 讲　数论问题 …… 200

综合练习………………………………………………………… 220

习题解答………………………………………………………… 224

基础篇

第 1 讲

排列与组合

组合数学，也称作组合分析，是一个重要的数学分支，肇源极古.

组合数学与许多数学分支相交叉，因而很难（也不必要）对它下一个正式的定义. 由本书涉及的组合数学的内容，读者可大致了解其基本的特点.

组合数学中的一个重要课题是计数问题，其大意是确定满足某种限制条件的元素个数. “排列”与“组合”则是这一课题中最简单和基本的内容.

一、加法原理和乘法原理

加法原理及乘法原理，是组合计数的基本的原则，也是进一步研究其他组合问题的基础.

1. 加法原理 做一件事，完成它的方法可分为 n 个互不相交的类，在第一类中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，则完成这件事共有

$$m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

加法原理的精神是“整体”等于“部分”之和，应用加法原理，就是将“整体”（完成一件事的方法）分成若干个互不相交的类，使得每一类中的元素个数易于计算. 至于如何分组，当然得根据具体问题而定.

注 1 加法原理可用集合的语言表述为下面更为一般的形式：设 S 是一个（有限）集合，S_1，S_2，…，S_n 是 S 的一个划分，即 S_1，S_2，…，S_n 中任两个均不相交，而它们的并集为 S，则

$$|S|=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_n|,$$

这里及以后,记号$|X|$均表示有限集 X 的元素个数.

然而,如果 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 并非两两不交,为计算$|S|$,则需要稍深入的方法——容斥原理,这一原理将在第 4 讲中讨论.

2. 乘法原理 如果做第一件事有 m_1 种方法,第一件事做完后做第二件事有 m_2 种方法,……,第一,第二,…,第 $n-1$ 件事做完后做第 n 件事有 m_n 种方法,则先做第一件事,再做第二件事,……,最后做第 n 件事就有

$$m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种方法.

应用乘法原理的要点是,将完成一件事的过程分解为若干个步骤,而每个步骤中的方法数目易于确定.

乘法原理也可用集合的语言表述,但这一形式稍有些抽象,并且本书中并不需要,因此我们不作讨论.

二、几类基本计数问题

这一节我们介绍排列与组合中几类典型的计数问题,许多计数问题可化归为这些模型之一来处理.

1. 排列

(1) **无重排列** 从 n 个不同元素中有序且不重复地选取 k ($1\leqslant k\leqslant n$) 个元素,称为从 n 个不同元素中取出 k 个元素的一个无重排列,简称为 **k-排列**,所有这样的排列个数记作 P_n^k.

由乘法原理得

$$\mathrm{P}_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

(选择第一位元素有 n 种方法,选定第一位后,由于元素不允许重复,选择第二位元素有 $n-1$ 种方法,…,最后选择第 k 位元素有 $n-k+1$ 种方法.)

特别地,如果 $r=n$, 就得到 n 个不同元素的**全排列公式**(即 n 个不同元素的 n-排列的种数):

$$P_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

为了方便起见,约定 $0! = 1$, 则上面公式可改写成

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(2) **重复排列** 从 n 个不同元素中有序且可重复地选取 k $(k \geqslant 1)$ 个元素,称为 n 个不同元素的一个 **k-可重排列.**

由乘法原理易知, n 个不同元素的 k-可重排列数为 n^k. (选第一位元素有 n 种方法,选定第一位后,第二位仍有 n 种选取方法,…,最后,第 k 位也有 n 种选法.)

(3) **有限重复元素的全排列** 设 n 个元素可分为 k 个组,同一组中元素彼此相同,不同组间的元素不相同. 设 k 个组的元素个数依次为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$, 则这 n 个元素的全排列称为**有限重复元素的全排列**,其排列数为

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}.$$

为了证明,我们设有 n_1 个 x, n_2 个 y, …, n_k 个 z. 任取一个这种全排列,设想将其中的 n_1 个 x 分别赋以下标 $1, 2, \cdots, n_1$, 则这种添下标的方法有 $n_1!$ 种,对其中 n_2 个 y 也赋以下标,则有 $n_2!$ 种方式,如此进行,直到对 n_k 个 z 也赋以下标,则有 $n_k!$ 种方式.

这样,由乘法原理推出,由每个满足要求的排列恰产生 $n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!$ 个赋下标的排列. 又易知两个不同的满足要求的排列所产生的赋下标的排列之间没有相同的. 反过来,任意一个赋下标的排列都可以这样得到. 因此所求的排列数的 $n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!$ 倍便是全部赋下标的排列数,而后者恰是 n 个不同元素的全排列数,即 $n!$, 由此得出所说的结果.

注 2 上面的解法,运用了一个非常重要的想法:**对应**. 但这个对应并非是一一对应(一个符合要求的排列对应一个由 $n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!$ 个赋下标的排列构成的集合).

对应,是处理计数及其他许多组合问题的重要思想. 请参考下面的问题及第 3 讲.

注 3 如果所有 n_i 都是 1(从而 $k=n$),则我们的公式化为 n 个不同元素的全排列公式.

注 4 有重复元素的全排列数当然是整数,因此我们得到一个"副产品":

(i) 设 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 都是正整数,则

$$\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

是整数.

特别地,取 $k=2$, 并改记 $n_1=m$, $n_2=n$, 则由

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}=\frac{(m+n)\cdots(n+1)}{m!}$$

是整数,易于推出:

(ii) 任意连续 m 个整数的积被 $m!$ 整除.

(ii) 是一个非常基本的结论,用处很多.我们顺便提一下,反复用(ii)也不难导出(i).

(4) **圆周排列** 从 n 个不同元素中(无重复地)取出 k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素排在一个圆周上,称为 n 个不同元素的一个 **k-圆排列**. 如果一个 k-圆排列旋转可以得到另一个 k-圆排列,则认为这两个圆周排列相同.

n 个不同元素的 k-圆排列数为

$$\frac{\mathrm{P}_n^k}{k}=\frac{n!}{k\cdot(n-k)!}.$$

特别地,用全部 n 个不同元素作成的圆周排列的总数为 $(n-1)!$.

为了证明,我们注意,对每一个固定的 k-圆排列,在任意两个元素之间将圆周剪开,恰产生 k 个不同的"直线排列",即 k-排列;不同的 k-圆排列产生的 k-排列彼此也必不同. 又易见任一个 k-排列都可以这样得到. 因此 k-圆排列数的 k 倍等于 k-排列的数目,即 P_n^k,由此得出结论.

2. 组合

(5) **无重组合** 从 n 个不同元素中,无序且不重复地取 k $(1\leqslant$

$k \leqslant n$) 个元素，称为从 n 个不同元素中取 k 个元素的一个(无重)组合，简称 **k-组合**. 从 n 个不同元素中取 k 个元素的组合数记为 $\binom{n}{k}$，则

$$\binom{n}{k} = \frac{\mathrm{P}_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

实际上，对每一个固定的 k-组合，将其元素作全排列共产生 $k!$ 个不同的 k-排列. 显然，不同的 k-组合产生的排列互不相同，且每个 k-排列均可以这样得到. 因此 $k!\binom{n}{k} = \mathrm{P}_n^k$，这就是所述结果.

注 5　由于组合数当然是整数，我们又一次得出了"任意连续 m 个整数之积被 $m!$ 整除".

(6) **重复组合**　从 n 个不同元素中，无序但可重复地选取 k ($k \geqslant 1$) 个元素，称为 n 个不同元素的一个 **k-可重组合**.

n 个不同元素的 k-可重组合数为 $\binom{n+k-1}{k}$.

为了证明，不妨设 n 个元素为 $1, 2, \cdots, n$. 设选取的 k 个元素为

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k (\leqslant n),$$

则显然

$$(1 \leqslant) a_1 + 0 < a_2 + 1 < \cdots < a_k + k - 1 (\leqslant n + k - 1).$$

将 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 与 $\{a_1 + 0, a_2 + 1, \cdots, a_k + k - 1\}$ 对应，后者是 $1, 2, \cdots, n + k - 1$ 的一个 k- 组合.

反过来，$1, 2, \cdots, n + k - 1$ 的任一个 k-组合

$$(1 \leqslant) b_1 < b_2 < \cdots < b_k (\leqslant n + k - 1)$$

也恰对应于 $1, 2, \cdots, n$ 的一个 k-可重组合

$$(1 \leqslant) b_1 \leqslant b_2 - 1 \leqslant \cdots \leqslant b_k - (k-1) (\leqslant n).$$

因此，上面说的对应是一一对应，从而所求的 k-可重组合数等于 $1, 2, \cdots, n + k - 1$ 的 k-组合数，即 $\binom{n+k-1}{k}$.

注 6　问题的一种不同解法请看第 3 讲中例 1 及注 1，而关于有限重复的组合，可参考第 14 讲中例 4 及注 1.

三、例　子

例 1　用九个 1，四个 0 排成一个数列，其中没有两个 0 相邻，问共有多少种不同的排法.

解　先排九个 1，共产生 10 个“空档”；再将四个 0 插入这 10 个“空档”，共得出 $\binom{10}{4} = 210$ 种（符合要求的）不同的数列.

例 2　将十个人分为五个小组，每组两人，共有多少种不同的分法？

解　取定一个人 A，则包含 A 的两人组共有 9 种选择. 当包含 A 的两人组确定后，再从余下的八人中取一个 B，则包含 B 的两人组有 7 种选择，如此进行，可知所求的分组方式为 $9\times7\times5\times3\times1 = 945$ 种.

这一解法的精神是递推，关于这些，我们在第 3 讲中还将进一步讨论.

例 3　集合 $\{1, 2, \cdots, 100\}$ 的子集中，共有多少个子集至少包含一个奇数？

解　集合 $\{1, 2, \cdots, 100\}$ 的全部子集个数易于确定，是 2^{100}，但直接求符合要求的子集数目有些麻烦. 然而，不合要求的子集，即是 $\{2, 4, \cdots, 98, 100\}$ 的子集，其个数也易知为 2^{50}. 因此，所求的子集个数是 $2^{100} - 2^{50}$.

注 7　设 S 是一个有限集合，A 是 S 中具有“某种性质”的元素之集. 在 $|S|$ 已知（或易求）时，若 $|A|$ 不易确定，则可（试着）考虑集合 $\overline{A}$（A 关于 S 的补集），即 S 中不具有“某种性质”的元素之集. 由于 A 与 $\overline{A}$ 有一种好的整体性态：$|A| + |\overline{A}| = |S|$，求得了 $|\overline{A}|$ 便（间接地）求出了 $|A|$. 这是计数问题中相当基本的想法（例 3 仅是最简单的应用）；并且，被推广为组合数学中一个非常重要的原则——容斥原理（请参看第 4 讲）.

例 4　数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

的每一项为 0, 1, …, $k-1$ 之一($k\geqslant 2$ 为整数),这样的数列中,0 出现偶数次的有多少个?(答案用 n 与 k 的简单函数表示.)

解 本题同时考虑"0 出现奇数次"的数列更为适宜,这些可看作是"0 出现偶数次的数列"的"互补"(或"互伴")数列.

记 0 出现偶数次的数列有 x_n 个,出现奇数次的有 y_n 个. 对每个整数 $i\geqslant 0$,恰含 i 个 0 的数列易知有 $\binom{n}{i}(k-1)^{n-i}$ 个(这种数列中,n 个位置上有 $\binom{n}{i}$ 种方式排 i 个 0,其余每个位置填 1, 2, …, $k-1$,均有 $k-1$ 种选取方式). 因此,

$$x_n=\binom{n}{0}(k-1)^n+\binom{n}{2}(k-1)^{n-2}+\binom{n}{4}(k-1)^{n-4}+\cdots,\qquad ①$$

以及

$$y_n=\binom{n}{1}(k-1)^{n-1}+\binom{n}{3}(k-1)^{n-3}+\cdots.\qquad ②$$

分别将①、②相加减,并应用二项式定理,得到

$$\begin{cases}x_n+y_n=k^n, & ③\\ x_n-y_n=(k-2)^n. & ④\end{cases}$$

由此易知 $x_n=\frac{1}{2}[k^n+(k-2)^n]$.

注 8 等式③的正确性可由组合意义看出来(无需①、②). 求出了 x_n+y_n,为确定 x_n,可试着产生 x_n 与 y_n 的另一个等量关系(最简单的当然是考虑 x_n-y_n). 然而,若没有导出①和②,这样的等式似乎不易建立.

本题用递推的方法也能解决(不必用①、②及二项式定理),这留给读者完成(第 3 讲练习题,第 10 题).

注 9 由于"互补"(或"互伴")的量,在整体上通常有较好的性态.(参考注 7 及上面的等式③.)引入与所考虑量(在某种意义上)