赠阅

连续相变与重正化群

（1978年统计物理讨论会综述报告）

于渌

中国科学院物理研究所

1978年4月 北京

前　言

近十年来连续相变的理论有了很大的进展。这里说的连续相变是指二类以上的相变和一类相变线的结束点——临界点。有时简称为临界现象。推动这一进展的主要因素是：精密的实验测量，统计模型严格解和级数展开解的改进，与量子场论在概念和方法上的互相渗透。最后一个因素是十分重要的。1971年K.G.Wilson提出重正化群方法，求出的临界指数与实验符合很好，取得了突破。此后，临界现象理论迅速发展，这方面的文献已超过千篇。

这份讲义是在1973年以来物理所二室理论组内若干次报告的基础上形成的。它只是对重正化群方法的简要介绍，动态临界现象和许多具体应用都未涉及。第二章§3与§4的表述是与蒲富恪同志共同讨论的结果，未公开发表过，其中吸取了[17][18]的一些想法。

由于时间和印刷力量的限制，讲义的叙述部分比较简要，公式推导中给出必要的中间步骤。为阅读第三章，需要对场论方法有比较深入的了解，可参看[6]。鉴于这方面的文献浩如烟海，我们仅指出少量直接引用的文章出处。作为入门，可参看[1]—[3]，[22]。[4]中包括了重正化群方法各个侧面的总结，[5]在历史上起了很大作用，比较全面地叙述了早期的文献。其他总结性文章或专著有[13]—[22]，[23]是动态临界现象的总结。还有大量报告、讲演等，不再一一列举。

目　录

第一章　引　论

§1　临界现象的描述

§1.1. 铁磁相变的例子

物体在相变点附近的行为主要通过几个临界指数来描述。

居里点以下有自发磁化，

$$M \sim (T_c - T)^{\beta}, \qquad \beta \approx \frac{1}{3} \qquad (1.1.1)$$

居里点（$T = T_c$）的等温线

$$H \sim M^{\delta}, \qquad \delta \approx 4.5 \qquad (1.1.2)$$

零场下的比热有奇异性，

$$C_{H=0} \sim (T_c - T)^{-\alpha'} \quad T < T_c, \qquad (1.1.3)$$

$$\sim (T - T_c)^{-\alpha}, \quad T > T_c, \ \alpha, \alpha' \doteq 0.2.$$

起始磁化率也有发散

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{T, H=0} \sim (T_c - T)^{-\gamma'}$$

$$\sim (T - T_c)^{-\gamma}, \qquad (1.1.4)$$

$$\gamma, \gamma' \approx \frac{4}{3}.$$

自旋关联函数

$$G(x, y) = \langle S(x) S(y) \rangle - \langle S(x) \rangle \langle S(y) \rangle \qquad (1.1.5)$$

的傅氏变换

$$G(K) \sim (\varkappa^2(T) + K^2)^{-1+\frac{\eta}{2}} \qquad (1.1.6)$$

其中 $\varkappa(T) \sim (T_c - T)^{\nu'}, \quad T < T_c, \qquad (1.1.7)$

$$\sim (T - T_c)^{\nu}, \quad T > T_c, \ \nu, \nu' \approx \frac{2}{3},$$

$\eta \lesssim 0.2$。

如果 $h=0$，对于三维情形，关联函数随 $r=|\vec{x}-\vec{y}|$ 的变化

$$G(r) \sim \frac{1}{r} exp(-\varkappa(T) r) , \quad (1.1.8)$$

因此，可将 $\xi=\varkappa^{-1}(T)$ 看成关联长度。

容易证明，在玻恩近似下，微分散射截面

$$\sigma(K) \sim G(K) . \quad (1.1.9)$$

由 (1.1.6) 和 (1.1.7) 看出，$T \to T_c$ 时，向前散射截面 $\sigma(0)$ 发散。

§ 1.2 其他相变的比较

其他连续相变与铁磁相变类似。以液体——气体临界点为例，只要作以下变量代换即可。

$M \longrightarrow \rho_L-\rho_G$ （液相与气相密度差）

$H \longrightarrow p$ （压力）

$C_{H=0} \longrightarrow C_V$ （定容比热）

$\chi_T \longrightarrow K_T$ （等温压缩率）。

其他如合金有序无序相变、溶液、铁电、超导、超流等也完全类似。

归纳起来，连续相变的主要特点是：

1) 有一个临界温度 T_c，T_c 以下序参量 M 不为零，但 $T \to T_c$ 时，$M \to 0$。

2) 临界点 $T=T_c$ 有对称的破坏。如果被破坏的是连续对称（如海森堡铁磁体），相应的恢复对称的元激发无能隙（Goldstone 定理）。

3) 临界点附近关联长度 $\xi \to \infty$，导致大涨落，磁化率和向前散射截面的发散。这时必然出现"软模"。以液——气临界点为例，声速 $v \sim (\rho K_S)^{-1/2} \longrightarrow 0$，这里 K_S 是绝

热压缩率，也发散。

4)各种体系不仅定性上相同，定量上也差别不大。临界指数主要与空间维数 d 有关，也依赖内部自由度的数目 n，与对称及相互作用细节无关。这一特点叫普适性（Universality）。

各类相变的比较见表 1.1.

表 1.1　各类相变的比较

相变名称	序参量	场	被破坏的对称	恢复对称的模式
液—气	$\rho_L-\rho_G$	$\mu_L-\mu_G^{*}$	反射	声子
有序—无序	$\rho_1-\rho_2$	$\mu_1-\mu_2$	〃	〃
溶液	$\rho_1-\rho_2$	$\mu_1-\mu_2$	〃	〃
各向异性铁磁体	M	H	$M\to -M$	自旋波软模
各向同性铁磁体	$\vec{M}$	$\vec{H}$	$O(3)$	自旋波
铁电体	$\vec{P}$	$\vec{E}$	极化方向	软模
超导	Δ	无经典对应	规范群	集体激发
超流	Ψ	〃	〃	〃

* 不讨论细节，它正比于压力 P。

§1.3　热力学不等式

§1.1 中定义的 9 个临界指数不是独立的，基于热力学的考虑，就可以推出一些不等式。举一个例子：

根据热力学关系

$$C_H-C_M=T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H^2\chi_T^{-1}\ , \qquad (1.1.10)$$

和热力学稳定条件　　$C_M>0$ ，　　(1.1.11)

得出
$$C_H \geq T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H^2 \chi_T^{-1} \qquad (1.1.12)$$

由 $\frac{\partial M}{\partial T} \sim (T_c - T)^{\beta-1}$，和 C_H，χ_T 的定义 (1.1.3)，(1.1.4) 得出

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2, \quad (\text{Rushbrooke}), \qquad (1.1.13)$$

类似的办法可得出

$$\alpha' + \beta(\delta+1) \geq 2, \quad (\text{Griffith}) \qquad (1.1.14)$$

再加上一些物理上合理的假定，还可得出一系列不等式：

$$\left.\begin{array}{l}\gamma' \geq \beta(\delta+1) \\ \gamma(\delta+1) \geq (2-\alpha)(\delta+1)\end{array}\right. \quad (\text{Griffith}) \qquad (1.1.15)$$

$$(2-\eta)\nu \geq \gamma, \quad (\text{Fisher}) \qquad (1.1.16)$$

$$\left.\begin{array}{l} d\,\frac{\delta-1}{\delta+1} \geq 2-\eta, \\ \frac{d\gamma'}{2\beta+\gamma'} \geq 2-\eta, \end{array}\right. \quad (\text{Buckingham, Gunton}) \qquad (1.1.17)$$

$$\left.\begin{array}{l} d\nu \geq 2-\alpha, \\ d\nu' \geq 2-\alpha'. \end{array}\right. \quad (\text{Josephson}) \qquad (1.1.18)$$

实验上发现，这些关系实际上作为等式成立，这就是所谓标度律（Scaling Law）。

§2. 统计模型与标度变换

§2.1. 讨论相变的不同模型

分析问题的出发点与研究的对象有很大的关系。相变是一种涉及大量粒子的集体效应，只要我们采用的模型的"分辨率"高于关联长度就可以了。以铁磁体为例，不必要从只有一堆无

子核和电子的"完全微观"模型出发，也不需要研究晶格中电子相互作用的细节。通常采用的是两类模型：

1)、经典自旋模型，或叫元胞模型，即一个元胞用一个经典的自旋来代表。常用的形式是

$$\mathcal{H}=-J\sum_{i,j}S_i^{\alpha}S_{i+j}^{\alpha} \qquad (1.2.1)$$

这里 i 对格点求和，j 对近邻求和，它们都是矢量，未特别标出。α 是自旋分量的角标。只有一个分量时叫 Ising 模型，两个分量叫 $X-Y$ 模型，三个分量叫 Heisenberg 模型。原则上可讨论分量数目 $n\to\infty$ 的极限，它等价于球模型。

2) 自旋集团模型。因于临界点附近关联长度 $\xi\to\infty$，可用自旋集团的平均值来代替元胞的自旋，用集团间的有效相互作用来代替自旋间的作用。这实际上是统计物理中常用的粗粒平均（coarse graining）方法。

为了缩小"分辨率"，可在坐标空间平均，

$$\bar{S}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}S_i \qquad (1.2.2)$$

这里 m 是集团中自旋的个数。也可以在动量空间平均，把自旋变量的实代变换

$$S_K=\sum_j e^{ir_jK}S_j \qquad (1.2.3)$$

的外波部分积分掉

$$\int\prod_{\Lambda/l\le K\le\Lambda} dS_K\cdots\cdots, \qquad (1.2.4)$$

这里 Λ 是截断因子，反比于晶格常数，l 是分辨率缩小的倍数。

对于平均了的自旋可以采用连续模型、坐标和自旋都变成

连续变量。离散模型的连续化有各种方法，这里介绍一种比较"物理"的讨论，比较"数学"的讨论放到第三章中。

以Ising 模型为例，元素自旋可能取的值是±1，对自旋状态的求和

$$\sum_{\{S\}}\cdots = 2\int ds\,\delta(S^2-1) \qquad (1.2.5)$$

现在将自旋分布函数 $\delta(S^2-1)$ 换成 $\exp\left(-\frac{r}{2}S^2-\frac{u}{4!}S^4\right)$，自旋哈密顿量（1.2.1）写成

$$\mathcal{H}=\frac{J}{2}\sum_{i,j}(S_i-S_{i+j})^2+\sum_i\left(\frac{1}{2}rS_i^2+\frac{1}{4!}uS_i^4\right) \qquad (1.2.6)$$

再把坐标连续化，用 ∇S 代替 S_i-S_{i+j}，选择适当的单位，求得常用的 Ginzburg－Landau 型哈密顿量：

$$\mathcal{H}[S]=\int d^dx\left[\frac{1}{2}(\nabla S)^2+\frac{1}{2}rS^2+\frac{1}{4!}uS^4\right] \qquad (1.2.7)$$

对于多个分量的情形，$S^2=\sum_{\alpha=1}^{n}S^\alpha S^\alpha$，$(\nabla S)^2=\sum_{\alpha=1}^{n}\nabla S^\alpha\nabla S^\alpha$。

作傅氏变换后写成

$$\mathcal{H}[S]=\int d^dK\,\frac{1}{2}(r+K^2)S_KS_{-K}+\frac{u}{4!}\int_K S_1S_2S_3S_4\,\delta(1+2+3+4) \qquad (1.2.8)$$

这里1、2、…是动量 K_1、K_2 等的简写，积分变量也未详细写出。这份讲义中对坐标或动量的求和或积分有时交替使用。只在容易引起混淆的地方特别加以说明。这里 $\mathcal{H}$ 是无纲量，温度已经吸收进去。

§2.2 标度律

1966年前后，不少人从不同角度"推导"出标度律，其中以Kadanoff的推导最有启发性[6]。

引入无纲参量 $t=\frac{T-T_c}{T_c}$，$h=\frac{g\mu H}{kT_c}$。讨论由每边 l 个自旋组成的自旋集团。假定无胞问题（参量 t，h）与集团问题（参量 t_l，h_l）是等价的，则每个自旋的平均自由能

$$F(t,h)=l^{-d}F(t_l,h_l). \tag{1.2.9}$$

进一步假定，集团参数与无胞参数只差比例因子

$$t_l=tl^{x},\quad h_l=hl^{y}。 \tag{1.2.10}$$

根据磁矩定义

$$M=-\frac{\partial F}{\partial h}=l^{y-d}M(t_l,h_l). \tag{1.2.11}$$

若取 $h=0$，$t_l=tl^{x}=1$，$l=t^{-1/x}$，

求得

$$M(t,0)=t^{\frac{d-y}{x}}M(1,0),\quad \beta=(d-y)/x. \tag{1.2.12}$$

若取 $t=0$，$h_l=1$，$l=h^{-1/y}$，

得

$$M(0,h)=h^{\frac{d-y}{y}}M(0,1),\quad \delta=\frac{y}{d-y} \tag{1.2.13}$$

比热

$$C_{H=0}=-T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

$$C(t,0)=l^{-d+2x}C(t_l,0)=t^{-\frac{2x-d}{x}}C(1,0),$$

$$\alpha=2-\frac{d}{x}, \tag{1.2.14}$$

磁化率 $\chi=\frac{\partial M}{\partial h}$

$$\chi(t,h)=l^{2y-d}\chi(t_l,h_l),$$

$$\chi(t,0)=t^{\frac{d-2y}{x}}\chi(1,0),$$

$$\gamma=(2y-d)/x. \tag{1.2.15}$$

由(1.2.12)—(1.2.15)中消去 x、y 求得

$$\alpha+2\beta+\gamma=2 \qquad (1.2.16)$$

$$\alpha+\beta(\delta+1)=2 。\qquad (1.2.17)$$

自旋关联函数的量纲为磁矩量纲的两倍。因此，磁场 $h=0$ 时

$$G(r,t)=\ell^{2(y-d)}G(r/\ell,t\ell^{x}) \qquad (1.2.18)$$

$$G(r,0)=r^{2(y-d)}G(1,0)$$

另一方面，根据 η 的定义

$$G(r)=\int d^{d}p\,\frac{e^{ipr}}{p^{2-\eta}}\sim r^{2-\eta-d}$$

求得
$$\eta=d+2-2y \qquad (1.2.19)$$

关联长度

$$\xi(t)=\ell\,\xi(t\ell^{x})=t^{-\frac{1}{x}}\xi(1),$$

$$\nu=\frac{1}{x} \qquad (1.2.20)$$

由(1.2.14)，(1.2.19)和(1.2.20)可以求得

$$\alpha=2-d\nu 。\qquad (1.2.21)$$

$$\gamma=(2-\eta)\nu 。\qquad (1.2.22)$$

比较细致的讨论还可给出 $\gamma=\gamma'$，$\alpha=\alpha'$，$\nu=\nu'$。因此，9个临界指数中只有两个是独立的。这实际上包含在原始假定中，即只有 t 与 h 两个独立的标度参数。

(1.2.11) 式可改写成

$$M(h,t)=h^{\frac{d-y}{y}}M(1,th^{-\frac{x}{y}}),$$

$$h=M^{\frac{y}{d-y}}f(tM^{-\frac{x}{d-y}})。$$

利用(1.2.12)和(1.2.13)可写成

$$h=M^{\delta}f(tM^{-1/\beta}), \qquad (1.2.23)$$

通常称为 Widum 标度形式的状态方程。

§3. 平均场理论和高斯近似

§3.1. Landau 理论

平均场理论有各种表述形式，带有不同名称。Landau的唯象理论共有代表性。

假定在相变点附近，热力学势（以M作自变量的）可展开成级数，保留前几项

$$\Gamma(M)=\Gamma_0(T)+\frac{r(T)}{2}M^2+\frac{u(T)}{4!}M^4, \qquad (1.3.1)$$

且系数 $r(T)$，$u(T)$ 也可展开

$$r(T)=a(T-T_c), \qquad u(T)\propto u \qquad (1.3.2)$$

磁场

$$H=\frac{\partial\Gamma}{\partial M}=r(T)M+\frac{u(T)}{6}M^3 \qquad (1.3.3)$$

无外场时的平衡值：

$$M=0, \qquad T>T_c,$$

$$M^2=\left(\frac{6a(T_c-T)}{u}\right)^{1/2}, \qquad T<T_c \qquad (1.3.4)$$

因此，$\beta=\frac{1}{2}$。 (1.3.5)

若 $T=T_c$， $H=\frac{u}{6}M^3$， $\delta=3$。 (1.3.6)

磁化率 $\chi_T=\frac{\partial M}{\partial H}$，

$$\left(r_{(T)}+\frac{u(T)M^2}{2}\right)\chi_T=1$$

$$T>T_c, \quad \chi_T=\frac{1}{r}=C_+(T-T_c)^{-1},$$

$$T<T_c, \quad \chi_T=\frac{1}{-2r}=C_-(T_c-T)^{-1},$$

因此，$\gamma=\gamma'=1$， $C_+/C_-=2$ (1.3.7)

比热 $C=-T\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial T^2}\right)_{H=0}$

$T>T_c$ 时，只有非奇异项 $\Gamma_0(T)$ 的贡献。$T<T_c$ 时，有一个附加的贡献，来自

$$\Delta\Gamma=\frac{\gamma(T)}{2}M^2+\frac{u}{4!}M^4=-\frac{3}{2}\frac{a^2}{u}(T-T_c)^2 \qquad (1.3.8)$$

因此，比热有一个有限的跳跃

$$\Delta C\approx 3T_c\frac{a^2}{u}\quad,\quad \alpha=0 \qquad (1.3.9)$$

平均场理论给出的临界指数 $\alpha=0$（有限断裂），$\beta=\frac{1}{2}$，$\gamma=1$、$\delta=3$，具有很强的普适性，而空间维数 d 及内部自由度 n 均无关，但与实验不符。

§3.2 涨落和高斯近似

最初的平均场理论是不考虑涨落的。如果允许有涨落，叫高斯近似。

令磁矩

$$\vec{S}=M\vec{L}+\vec{\varphi}\quad, \qquad (1.3.10)$$

其中 M_0 是空间均匀的自发磁化，$\vec{L}$ 是磁场方向，$\vec{\varphi}$ 是涨落部分。

若 $T>T_c$，准到 φ^2 项，

$$\mathcal{H}(S)=\mathcal{H}(M)+\frac{1}{2}\int(\gamma+K^2)\vec{\varphi}_K\vec{\varphi}_{-K} \qquad (1.3.11)$$

除元有结果外，可求得关联函数

$$G(K)=(\gamma+K^2)^{-1} \qquad (1.3.12)$$

$$T=T_c,\quad \gamma=0,\quad G(K)=K^{-2},\quad \eta=0. \qquad (1.3.13)$$

$$K^2=0.\quad G(\gamma)=\gamma^{-1},\quad \xi^2(T)\sim(T-T_c),$$

$$\gamma=\frac{1}{2}. \qquad (1.3.14)$$

能量也多一项修正，高斯积分的贡献是

$$\Delta F \sim \sum_k \ln(r+k^2), \qquad (1.3.15)$$

$$\Delta C_{涨} \sim \int \frac{d^d k}{(r+k^2)^2} \sim (T-T_c)^{\frac{1}{2}(d-4)}. \qquad (1.3.16)$$

如果 $d<4$，这一项的贡献比原来平均场的有限断裂重要。

对于 $T<T_c$ 的情况，要区分自旋分量与磁场平行和垂直的两种情形。设第一分量平行于磁场。由 S^4 项得来的 φ^2 项系数，对于第一分量是 $6M^2$，对于其它分量是 $2M^2$。因此

$$G_{\parallel}^{-1}(k)=r+\frac{u}{2}M^2+k^2, \qquad (1.3.17)$$

$$G_{\perp}^{-1}(k)=r+\frac{u}{6}M^2+k^2=\frac{H}{M}+k^2. \qquad (1.3.18)$$

若外磁场为零，横向磁化率在 $k=0$ 时发散，与 Gobeletone 定理一致。比热的贡献与 $T>T_c$ 的情形类似。

对于平均场理论，只有当维数 $d=4$ 时，标度律 $\alpha=2-d\nu$ 才成立。对于高斯近似，任意的 d 都满足。关于高斯近似的进一步讨论见第三章3.1。

§3.3 Ginzburg 判据和维数的重要性

在临界点上，$\xi\to\infty$，涨落特别大，平均场理论不能用。可以用涨落项与有限断裂项比热贡献之比来确定平均场理论的适用范围。

$$\Delta C_{涨}/\Delta C \sim \frac{(T_c a)^{d/2}}{\Delta C}\, t^{-2+\frac{d}{2}} \qquad (1.3.18)$$

这里 $t=\left|1-\frac{T}{T_c}\right|$。这个比值可改写成

$$\Delta C_{涨}/\Delta C=(t_T/t)^{2-\frac{d}{2}} \qquad (1.3.18)$$

$$t_T=(\xi_0^{-d}/\Delta C)^{2/(4-d)} \qquad (1.3.19)$$

$\xi_0 \sim (a T_c)^{1/2}$ 是外推到 $T=0°$ 时的关联长度。对于不同的体系，ξ_T 的数值很不相同。对于超导 $\xi_T \sim 10^{-10}$，对于液氦 $\xi_T \sim 0.3$。这说明，平均场理论对超导是适用的，对超流几乎没有适用的范围。

涨落的作用与空间维数有密切关系。$d=1$ 时，涨落使得相变不可能发生（见 Landau 统计物理书中最后两页的讨论）。$d=2$ 时，内部自由度 $n \geq 2$ 的体系也没有相变。$d>4$ 时，涨落使平均场理论在相变点附近不成立。$d>4$ 时，涨落的作用大大削弱，平均场理论始终成立。这一结论在重正化群理论中仍旧保持。

第二章 重正化群（非标准场论方法）

§.1. 基本思想

相变理论的困难在于它是一个"真正的"多体问题，不能归结为少数粒子间的关联。必须找出一种"减少"自由度的办法。类似平均场理论的宏观理论又很不充分。要设法建立微观到宏观的桥梁。第一章 §.2 中介绍的 Kadanoff 自旋集团模型和标度变换提供了很好的基础。

以二维的 Ising 模型，比较直观。设元素的自旋只有近邻相互作用，耦合常数是 J。变成 2×2 的自旋集团后，假定仍为近邻相互作用，耦合常数

$$J_1 = f(J) \qquad (2.1.1)$$

进一步假定，f 是解析函数。变成新的有效自旋模型后，"尺子变长"了，关联长度相应地缩小