教育科学“十五”国家规划课题研究成果

# 应用数学基础
## ——概率论与数理统计

主　编　沈京一
副主编　张晓晞

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容提要

《应用数学基础》系列教材是教育科学"十五"国家规划课题研究成果，依据"工科数学课程教学基本要求"编写而成。全书包括微积分、线性代数、概率论与数理统计3门基础课程的主教材及相关辅导书，本书是其中的《概率论与数理统计》部分。

本书内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及其分布、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析、正交试验设计等。

本书理论体系结构合理，科学性强；强调数学知识的应用；教材内容安排由浅入深，可读性与可施教性强。可供培养应用型人才的高等学校理工类各专业学生使用，也可供其它专业的师生选用和社会读者阅读。

**图书在版编目(CIP)数据**

应用数学基础——概率论与数理统计/沈京一主编. —北京：高等教育出版社，2005.7
ISBN 7-04-014418-2

Ⅰ.应… Ⅱ.沈… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第050661号

**策划编辑** 王 强 **责任编辑** 王 强 **封面设计** 王凌波
**责任绘图** 尹文军 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 王 超
**责任印制** 孔 源

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010－58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街4号 | **免费咨询** | 800－810－0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010－58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **经　　销** | 北京蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **印　　刷** | 北京铭成印刷有限公司 | | |
| **开　　本** | 787×960　1/16 | **版　　次** | 2005年7月第1版 |
| **印　　张** | 13.75 | **印　　次** | 2005年7月第1次印刷 |
| **字　　数** | 250 000 | **定　　价** | 14.90元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。



**物料号　14418－00**

# 总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心(以下简称“教研中心”)在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组(亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组)。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

# 前　言

概率论与数理统计是一门历史悠久但又新枝丛生的学科，它的主要原理和基本方法在现代生活和科学技术中已得到广泛的应用。概率论与数理统计不仅是近代自然科学的基石和有力的分析手段，而且成为现代企业中质量管理的基础理论。同时，用概率统计的方法进行设计、试验以及配备能源，往往会带来很大的经济效益，这一点已为许多人所重视，并取得了明显的实际效果。一个盲目的试验者，虽然很辛苦，却不自觉地在那里浪费时间和物力，但若用“正交表”等科学的方法进行试验设计，则会收到事半功倍之效。

为适应我国高等教育目前发展的需要，全国高等学校教学研究中心设立了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题，而本书正是其中数学类子课题的研究成果之一。本书可供培养应用型人才的高等学校理工类各专业学生使用，同时也可供其它专业的师生选用和社会读者阅读。

本书由沈京一担任主编，共有6所院校的8位教师参加了编写，其中第一章由河北建筑工程学院李香玲编写；第二章、第八章中回归分析部分由北京联合大学张晓晞编写；第三章由德州学院张玉坤编写；第四、五章由三江学院狄芳、金炳陶编写；第六、七章由南京师范大学朱卓宇编写；第八、九章由常州工学院沈京一、王忠英编写。沈京一、张晓晞负责统稿。

本书内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本及其分布、参数估计，假设检验、方差分析、回归分析、正交试验设计等。

考虑到不同读者的需求，本书在内容叙述上由浅入深，习题按照不同难度分成了A、B、C三级，其中，A级为基本题，B级为较难的习题，C级为考研要求的习题。

在本书的编写过程中得到了以上几位教师及其所在学校的大力支持，在此深表感谢。尤其要特别感谢天津大学齐植兰老师，她针对本书的内容给出了详尽的审稿意见，使本书得以顺利出版。

由于水平有限，书中一定会有许多不妥之处，错误也在所难免，恳请读者提出宝贵意见。

编者

2004年12月

# 郑重声明

# 目　　录

# 第一章

# 随机事件与概率

自然界和人们在实践活动中所遇到的种种现象，一般来说可分为两类：一类是**必然现象**，或称**确定现象**；另一类是**随机现象**，或称**不确定现象**．必然现象是指在一定条件下重复试验，所得结果总是确定的现象；只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的．例如：在标准大气压下，将水加热到100℃，水必然沸腾；同性电荷相斥等等，这些现象都是必然现象．随机现象是指在一定条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定的现象，对这种现象来说，在每次试验之前哪一个结果发生，是无法预言的．例如：抛一枚硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上；向一个目标进行射击，可能命中目标，也可能不命中目标；从一批产品中，随机抽取检验，结果可能是合格品，也可能是次品等等，这些现象都是随机现象．但人们从长期观察或试验中得知，这种在个别试验中其出现结果呈现随机性的现象并不是没有规律可循的，它们在大量重复试验中仍然遵从一定的客观规律性．这种规律性称为**随机现象的统计规律性**．例如：在大量次投币试验中，正、反面分别出现的次数约为试验次数的1/2；对一个目标进行多次射击，弹孔按照一定规律分布．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

## §1.1 随机事件及其运算

### 1. 随机试验与样本空间

为了确定随机现象的规律性，需要对随机现象进行多次观察或实验，我们把这些工作统称为试验．由于概率论研究的对象是随机现象，因此，要求所做的试验都具有如下共同特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验前不能确定哪个结果将出现.

具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**，记为 $E$.

随机试验 $E$ 的每一个可能结果称为基本事件，或称为**样本点**，由全体样本点组成的集合，称为随机试验 $E$ 的**样本空间**，用 $\Omega$ 表示.

**例 1.1.1** 掷一枚骰子，观察其出现的点数，所有可能出现的结果有 6 个：1 点,2 点,…,6 点. 分别用 1,2,…,6 表示，则样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

**例 1.1.2** 一射手进行射击，直到击中目标为止，观察射击的次数. 如果用“第一次击中目标所需要的射击次数为 $i$ 次”($i=1,2,\cdots$)表示观察的结果，则样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$.

**例 1.1.3** 任意抽取一只日光灯，测试其寿命，用 $t$(单位:h)表示日光灯的寿命，则 $t$ 可取所有非负实数：$t\geqslant 0$，对应了试验的所有可能结果，则样本空间为 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

通过上面的例子我们可以看到，随机试验的样本空间可能有有限个样本点，可能有可列无穷多个样本点，也可能有不可列无穷多个样本点.

### 2. 随机事件

在随机试验中，对一次试验来说，可能出现也可能不出现的事情称为**随机事件**，简称**事件**. 用大写字母 $A$，$B$，$C$ 等表示. 例如在例 1.1.1 中

$$A=\{\text{出现 2 点}\};$$
$$B=\{\text{出现 5 点}\};$$
$$C=\{\text{出现偶数点}\}$$

等都是随机事件. 由一个样本点构成的事件称为**基本事件**，如 $A=\{$出现 2 点$\}$. 由若干个基本事件构成的事件，称为**复合事件**，如 $C=\{$出现偶数点$\}=\{$出现 2 点,出现 4 点,出现 6 点$\}$. 在每一次试验中必然要出现的事情称为**必然事件**，不可能出现的事情称为**不可能事件**. 例如：在例 1.1.1 随机试验中“出现的点数都不大于 6”是必然事件，“出现的点数大于 6”是不可能事件. 必然事件用 $\Omega$ 表示，不可能事件用 $\Phi$ 表示. 不可能事件和必然事件本来不是随机事件，但为了以后讨论方便，把它们都看作是一种特殊的随机事件.

### 3. 事件间的关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系. 详细分析事件之间的关系，不仅可以帮助我们更深入地认识事件的本质，而且可以大大简化计算一些复杂事件的概率.

设试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$，$\Omega$ 的子集 $A$，$B$，$A_k$($k=1,2,\cdots$)都是 $E$ 的事件. 在上一节中我们已知事件就是样本空间的子集，因此在这里对应着集合的

关系及运算给出事件间的关系及运算.

**(1) 事件的包含**

若事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生，则称事件 $A$ 包含于事件 $B$ 中，或称事件 $B$ 包含事件 $A$，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，如图 1.1.1 所示.

显然对任一事件 $A$ 有：$\Phi\subset A\subset\Omega$. 若 $A\subset B$ 且 $B\supset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等，记作 $A=B$.

**(2) 事件的并**

若事件 $A$ 与事件 $B$ 中至少有一个发生，这样构成的事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的并事件，(或称 $A$ 与 $B$ 的和事件)，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. 显然事件 $A\cup B$ 表示事件“或者 $A$ 发生，或者 $B$ 发生，或者 $A$ 与 $B$ 都发生”. 如图 1.1.2 中的阴影部分所示.

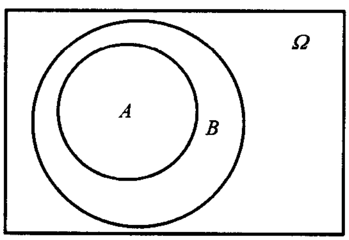


图 1.1.1

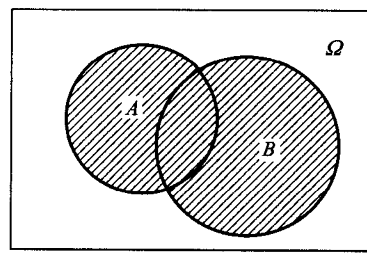


图 1.1.2

例如检验某产品是否合格须检验产品的两个指标：长度是否合格及直径是否合格. 只有当长度及直径两个指标都合格时才能认为产品合格，而只要长度及直径中有一个指标不合格就认为产品不合格. 若 $A$ 表示“长度不合格”，$B$ 表示“直径不合格”，则和事件 $A\cup B$ 表示“产品不合格”.

类似地，“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”称为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”称为可数个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ .

**(3) 事件的交**

由事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生而构成的事件，称为事件 $A$ 与 $B$ 的交事件 (或称为事件 $A$ 与 $B$ 的积事件)，记作 $A\cap B$，或简记为 $AB$. 如图 1.1.3 中的阴影部分所示.

例如在上述产品检验中，若 $A$ 表示“长度合格”，$B$ 表示“直径合格”，

则积事件 $A \cap B$ 表示“产品合格”.

类似地，“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”称为 $n$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $A_1 A_2 \cdots A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$．“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生”称为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cdots$ 或 $A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$．

**(4) 事件的差**

事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生，这样构成的事件，称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差事件，记作 $A-B$. 如图 1.1.4 中的阴影部分所示.

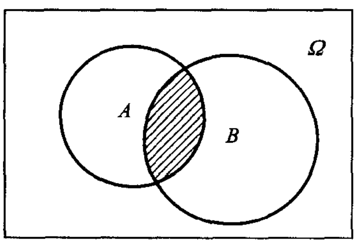


图 1.1.3

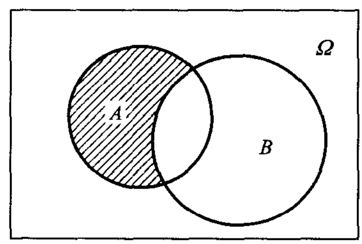


图 1.1.4

**(5) 互不相容事件**

若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容(或互斥)，记作 $AB=\Phi$. $A$ 与 $B$ 互不相容关系如图 1.1.5 所示，表示事件 $A$ 与事件 $B$ 没有共同的样本点.

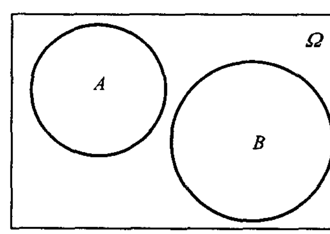


图 1.1.5

一般地，若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都互不相容，则称此 $n$ 个事件互不相容，可表为 $A_i A_j=\Phi$，$i \neq j$，$i$，$j=1,2,\cdots,n$. 类似地，若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中任意两个事件都互不相容，则称此可数个事件互不相容，可表为 $A_i A_j=\Phi$，$i \neq j$，$i$，$j=1,2,\cdots\cdots$.

**(6) 对立事件**

若事件 $A$ 与事件 $B$ 二者必有且仅有一个发生，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 为对立事件(或为互逆事件)，通常把 $A$ 的对立事件记作 $\overline{A}$(即 $B=\overline{A}$)，$\overline{A}$ 也称为 $A$ 的逆事件，例如，掷一枚硬币，用 $A$ 表示“出现国徽面”，而事件 $B$ 表示“出现币值面”，则 $A$ 与 $B$ 为对立事件. 如图 1.1.6 所示.

显然，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\Phi$.

要特别注意互斥事件与对立事件的区别：事件 $A$ 与事件 $B$ 互为对立事件它们必须满足两个关系式：$A\cup B=\Omega$，$A\cap B=\Phi$；而事件 $A$ 与事件 $B$ 为互斥事件，它们只须满足一个关系式：$A\cap B=\Phi$. 这就是说，当事件 $A$ 与 $B$ 对立，则事件 $A$ 与 $B$ 互不相容，反之不然.

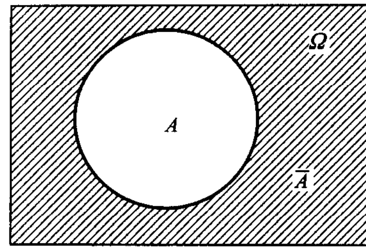


图 1.1.6

从以上讨论可以看出，概率论中事件之间的关系及运算与集合论中的关系及运算是一致的. 现将事件与集合的术语对照列表(见表 1.1.1).

**表 1.1.1**

| 符　　号 | 概 率 论 中 | 集 合 论 中 |
|---|---|---|
| $\Omega$ | 必然事件 | 全集 |
| $\Phi$ | 不可能事件 | 空集 |
| $A\subset B$ | $A$ 是 $B$ 的子事件 | $A$ 是 $B$ 的子集 |
| $A=B$ | 事件 $A$ 与事件 $B$ 相等 | 集合 $A$ 与集合 $B$ 相等 |
| $A\cup B$ | $A$ 与 $B$ 的和事件($A$ 与 $B$ 中至少有一个发生) | $A$ 与 $B$ 的并集 |
| $A\cap B$ | $A$ 与 $B$ 的积事件($A$ 与 $B$ 同时发生) | $A$ 与 $B$ 的交集 |
| $A-B$ | $A$ 与 $B$ 的差事件($A$ 发生而 $B$ 不发生) | $A$ 与 $B$ 的差集 |
| $AB=\Phi$ | $A$ 与 $B$ 为互斥事件($A$ 与 $B$ 互不相容) | $A$ 与 $B$ 不相交 |
| $\overline{A}$ | $A$ 的对立事件($A$ 的逆事件) | $A$ 的余集 |

集合论中常用的运算同样适用于概率论的事件的运算.

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A(B\cap C)$；

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

对偶律也叫做**德摩根律**.

**例 1.1.4** 甲、乙、丙三人对靶射击，用 $A$，$B$，$C$ 分别表示“甲击中”、“乙击中”和“丙击中”，试用 $A$，$B$，$C$ 表示下列事件：

(1) 甲、乙都击中而丙未击中；

(2) 只有甲击中；

(3) 靶被击中；

(4) 三人中最多两人击中；

(5) 三人中恰好一人击中.

**解** (1) 事件“甲、乙都击中而丙未击中”表示 $A$，$B$ 与$\overline{C}$同时发生，即：$AB\overline{C}$.

(2) 事件“只有甲击中”就是 $A$ 发生而 $B$，$C$ 未发生，可表示为：$A\overline{B}\overline{C}$.

(3) 事件“靶被击中”意味着或是甲击中或是乙击中或是丙击中，可表示为：$A\cup B\cup C$.

(4) 事件“三人中最多两人击中”意即“三人中至少有一人未击中”，可表示为：$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

(5) 事件“三人中恰好有一人击中”意即“三人中只有一人击中其余两人未击中”，可表示为：$A\overline{B}\overline{C}\cup B\overline{A}\overline{C}\cup C\overline{A}\overline{B}$.

## §1.2 随机事件的概率

研究随机现象，不仅要知道试验中可能出现哪些事件，更重要的是要研究各事件出现的可能性的大小，即所谓事件的**概率**. 怎样研究事件发生的可能性的大小呢？我们知道随机事件在一次试验中是否发生是不确定的. 但在大量重复试验中，它的发生却具有统计规律性，所以应从大量试验出发来研究它. 为此，先介绍频率的概念.

### 1. 频率

**定义 1.2.1** 设随机事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中出现 $m$ 次，则称比值$\frac{m}{n}$为事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中出现的**频率**，记为 $f_n(A)$，$m$ 称为频数.

即
$$f_n(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.2.1}$$

由频率的定义，容易得出它具有下列性质：

(1) 非负性：即对任何事件 $A$，$f_n(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：即对事件 $\Omega$(或 $\Phi$)，有 $f_n(\Omega)=1$(或 $f_n(\Phi)=0$)；

(3) 有限可加性：若 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则
$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i).$$

事件的频率这一概念我们平时经常用到，例如：检验产品质量标准之一的

"产品的合格率" $=\dfrac{\text{合格品个数}}{\text{产品总数}}$；检验某种药物疗效的"治愈率" $=$ $\dfrac{\text{治愈人数}}{\text{用药总人数}}$；检验射击技术标准之一的"命中率" $=\dfrac{\text{命中次数}}{\text{射击总次数}}$等等. 人们经过长期的实践发现，当重复试验的次数 $n$ 增大时，事件出现的频率在 0 与 1 之间的某个确定的常数附近摆动，并逐渐稳定于此常数，也就是说事件的频率具有一定的稳定性. 历史上曾有几位数学家作过掷一均匀硬币的试验，结果见表 1.2.1.

**表 1.2.1**

| 试验者 | 投硬币次数 | 出正面次数 | 频率 |
|---|---|---|---|
| 蒲丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

在上述掷硬币的试验中，当试验次数 $n$ 很大时，出现正面的频率在 $\frac{1}{2}$ 这个常数附近摆动. 这个确定的常数称为**相应事件发生的概率**.

### 2. 概率的统计定义

**定义 1.2.2** 在大量重复试验中，若事件 $A$ 发生的频率稳定地在某个常数 $p$ 附近摆动，则称该常数 $p$ 为事件 $A$ 的**概率**，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

由于试验次数 $n$ 增大时，频率 $f_n(A)$ 稳定于概率 $P(A)$，因此当 $n$ 很大时，常取频率作为概率的近似值：$P(A)\approx f_n(A)$，

类似地，概率的统计定义也满足频率的三条性质.

### 3. 古典概率

在概率论发展的初期，人们研究的是一种特殊的随机试验，即

(1) 只有有限个样本点；

(2) 各样本点的出现是等可能的.

我们称具备以上两个条件的随机试验为**古典概型的随机试验**.

**定义 1.2.3**(概率的古典定义) 设试验结果共有 $n$ 个基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，而且这些事件发生的可能性相等. 事件 $A$ 由其中的 $m$ 个基本事件组成，则事件 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}, \tag{1.2.2}$$

概率的这种定义称为**概率的古典定义**.

**例 1.2.1** 将一枚骰子掷两次，问出现点数之和等于 7 的概率是多少?

**解** 我们知道，两次掷骰子所有可能出现的点数共有 36 对，即基本事件总数 $n=36$. 而每一对出现的机会相等. 若记事件 $A$ 为“点数之和等于 7”，它包含(1,6)，(2,5)，(3,4)，(4,3)，(5,2)，(6,1)共 6 对，根据概率的古典定义得

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

**例 1.2.2** 在 100 件产品中，有 10 件次品，今从中任取 5 件，求(1)其中恰有 2 件次品的概率；(2)没有次品的概率.

**解** (1) 基本事件总数 $n=C_{100}^{5}$. 设 $A$ 表示事件“任取的 5 件产品中恰有 2 件次品”，则事件 $A$ 所包含的基本事件数可以这样计算：从 10 件次品中任取 2 件次品，有 $C_{10}^{2}$ 种取法；从 90 件正品中取得 3 件正品，共有 $C_{90}^{3}$ 种取法，因而 $m=C_{10}^{2}\times C_{90}^{3}$. 根据概率的古典定义得

$$P(A)=\frac{C_{10}^{2}\times C_{90}^{3}}{C_{100}^{5}}\approx 0.070\ 2.$$

(2) 用 $A_0$ 表示没有次品，则事件 $A_0$ 所包含的基本事件数 $m=C_{90}^{5}$，故

$$P(A_0)=\frac{C_{90}^{5}}{C_{100}^{5}}\approx 0.583\ 8.$$

**例 1.2.3** 把甲、乙、丙三名学生依次随机地分配到 5 间宿舍中去，假定每间宿舍最多可住 8 人. 求(1)这三名学生住在不同宿舍的概率；(2)至少有两名学生住在同一宿舍中的概率.

**解** (1) 由于每名学生都可能分配到这 5 间宿舍的任意一间，因此共有 $5\times5\times5=5^3$ 种分配方案，即 $n=5^3$. 设事件 $A$ 表示“这三名学生住在不同的宿舍里”. 对学生甲有 5 种分配方案；甲分配之后，为了使甲、乙不住同一宿舍，对学生乙只有 4 种分配方案；类似地，对学生丙只有 3 种分配方案. 于是，$m=5\times4\times3$. 由此得到

$$P(A)=\frac{5\times4\times3}{5^3}=\frac{12}{25}=0.48.$$

(2) 由于这个事件是事件 $A$ 的对立事件$\overline{A}$，$\overline{A}$必包含 $n-m$ 个基本事件，因此

$$P(\overline{A})=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A)$$
$$=1-0.48=0.52.$$

**例 1.2.4** 有 10 双不同的鞋子，丢了 6 只，求还剩完整 6 双鞋子的概率.

**解** 从 10 双不同的鞋子中取 6 只的方法有 $C_{20}^{6}$ 种，即 $n=C_{20}^{6}$. 设事件 $A$

表示“还剩完整 6 双鞋子”，由题意可知丢失的 6 只中恰有 4 只能配成两双，它们来自 10 双不同的鞋子中，取得的方法有 $C_{10}^2$ 种．而其余 2 只必是不同型号的，它们只能来自其余的 8 双，在这 8 双中随机取 2 双有 $C_8^2$ 种取法，对于所取的每一双可以取其左只，也可以取右只，有 $2^2$ 种取得方法．所以 $A$ 包含的基本事件数是 $m=C_{10}^2C_8^2 2^2$．根据概率的古典定义得

$$P(A)=\frac{C_{10}^2C_8^2 2^2}{C_{20}^6}\approx 0.130.$$

### 4．几何概率

概率的古典定义是对特殊的随机试验给出的，即假设试验的样本点只有有限个，且各样本点具有等可能性．对试验的样本点有无穷多个的情形，概率的古典定义就不适用了．考虑如何将古典定义作必要的推广，使给出的新的概率定义能适用于样本点是无穷多个而且具有等可能性的试验．为了说明下面将要讨论的数学模型，首先考察几个简单的例子．

某十字路口自动交通信号灯的红绿灯变换的周期为 60 秒，其中由南至北方向红灯时间为 15 秒．试求随机到达(由南至北)该路口的一辆汽车恰遇红灯的概率．从直观上看，这个概率应该是$\frac{15}{60}=0.25$.

如果在一个 5 万平方公里的海域里有表面积达 40 平方公里的大陆架贮藏着石油，假如在这海域里随意选定一点钻探，问钻到石油的概率是多少？从直观上看，这个概率应该是$\frac{40}{50\,000}=0.000\,8$.

在 400 毫升自来水中有一个大肠杆菌，从中随机取出 2 毫升水样放到显微镜下观察，求发现大肠杆菌的概率．从直观上看，这个概率应该是$\frac{2}{400}=0.01$.

将上述例子一般化，给出几何概率的定义及其算法

**定义 1.2.4** 如果试验 $E$ 的可能结果可以几何地表示为某区域 $\Omega$ 中的一个随机点(区域可以是一维、二维、三维，…)，并且点落在 $\Omega$ 中的某区域 $A$ 的概率与 $A$ 的测度(长度，面积，体积等)成正比，而与 $A$ 的位置无关，则随机点落在区域 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}},\tag{1.2.3}$$

称(1.2.3)式定义概率为几何概率．

**例 1.2.5** (会面问题)甲、乙二人约定于 7 时至 8 时在某地会面，二人可分别在这段时间内的任何时刻到达，先到者等候 20 分钟后若后到者仍未到则

先到者就离去，求二人能会面的概率.

**解** 用 $x$ 及 $y$ 分别表甲、乙二人到达时刻(单位:min)，他们都等可能地取区间[0,60]上的任一值

$$0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60,$$

以 $(x,y)$ 表 $Oxy$ 平面上一点，则样本空间是由边长为 60 的正方形上的点组成的区域：

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\},$$

二人要能会面，则后来者晚到的时间不能超过 20 分钟，即

$$|x-y|\leqslant 20,$$

若用 $A$ 表事件“二人能会面”，则 $A$ 是由正方形内满足上式的点组成的区域 $A(A\subset\Omega)$，如图 1.2.1 阴影部分所示：

$$A=\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant 20\},$$

由定义式(1.2.3)得

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{60^2-(60-20)^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

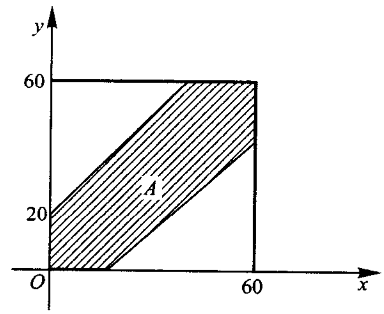


图 1.2.1

几何概率也有类似于古典概率的三条性质.

### 5. 概率的公理化定义及概率的性质

#### (1) 概率的公理化定义

以上给出了概率的三种定义，概率的古典定义是对古典概型随机试验给出的，它要求样本点总数有限且具等可能性；概率的几何定义也要求试验结果具有等可能性. 因而古典概型及几何概型的试验都具有一定的局限性，这两种概型显然不能包括所有的随机试验. 至于概率的统计定义虽能适用于一般的试验，然而我们在进行理论研究时，不可能对每个事件都进行大量的试验并从中得到频率的稳定值，况且统计概率在数学上也不够严密，定义中所说的试验次数究竟应多大以及所谓摆动应如何理解等，都没有确切的说明. 前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在总结前人的研究基础上于 1933 年给出概率的公理化定义，严格地叙述该定义需要涉及较深的数学知识，这里只简述如下：

**定义 1.2.5**(概率的公理化定义) 设 $E$ 是一个随机试验，如果对于 $E$ 的每一个事件 $A$ 都规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，而且这种规定满足下列三条公理：

**公理 1** 非负性：对任意事件 $A$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$； (1.2.4)

**公理 2** 规范性：$P(\Omega)=1$； (1.2.5)