新世纪

朱华伟 主编

数学
阶梯教室

立足课本

着眼提高

发展能力

初一分册

湖北教育出版社

新世纪数学阶梯教室

初 一 分 册

主编　朱华伟
编委　朱　晓　张京明　齐世荫
　　　刘箭飞　朱华伟

湖 北 教 育 出 版 社

（鄂）新登字 02 号

新世纪数学阶梯教室初一分册 ©朱华伟 主编

出版
发行：湖北教育出版社 汉口解放大道新育村 33 号

经　销：新　华　书　店
印　刷：湖北教育出版社印刷厂 （433100・潜江市环城路 62 号）
开　本：787mm×1092mm　1/32 10 印张
版　次：1998 年 9 月第 1 版 1999 年 8 月第 4 次印刷
字　数：226 千字 印数：20 001—28 000

ISBN 7—5351—2259—0/G・1841 定价：9.00 元

如印刷、装订影响阅读，承印厂为你调换

前　　言

新世纪的曙光已出现在东方地平线上，知识经济时代已初现端倪。知识经济时代的竞争在于高素质人才的竞争。高素质人才的培养必须从娃娃抓起，从青少年抓起。在数学教育中就要使学生在达到教学大纲要求的基础上，学习体现现代数学思想、富有灵活性和创造性的竞赛数学内容，以提高学生的数学素养和思维能力，培养学生的创新精神。

如何科学合理地开展数学竞赛培训活动，如何更好地将数学竞赛活动与课堂教学结合起来，既提高学生在中考中的竞争能力，又使学生适应数学竞赛，是摆在数学教育工作者面前的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材是这一课题取得进展的关键所在，也是提高教学效益，提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以国内外初中数学竞赛为背景，针对九年义务教育初中数学教学大纲的教学进度，按年级分三册编写。在编写的体例上按教程的形式分章节，每节后都有适当的习题。为了便于教与学，书末附有习题提示与答案。

在编写过程中，笔者力求遵循两条原则：

1. 课内与课外相结合。在内容的安排上力争与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充的方式形成系统的教程，着重思路的分析和方法技巧的总结，引导学生努力学好现行的中

学课本，进一步深化对现行课本内容的认识，体现数学竞赛活动“以课堂教学为主，课外活动为辅”的原则。因此学生只要把课内知识学好，又善于思考，就可以顺利地学好本书。

2. 普及与提高相结合。相对于正规的课堂教学，数学课外活动是一个提高的过程，但相对于培养各级数学竞赛的优秀选手，课外活动应视为普及，即面向大多数学生，普遍提高学生的数学素质并促进其全面发展。基于这一想法，本书用＊号标出教材中没有，竞赛有要求的内容，习题的编排也分节按难易程度分为 A 级和 B 级。A 级强调普及，注重基础，是课堂教学内容的加深和拓宽，帮助学生加深对现行课本的理解；B 级强调提高，帮助学生拓展知识视野，介绍课堂教学中没有，而竞赛中要求的内容、方法、技巧。读者可根据自己的实际情况和要求选做。

通过本书的学习，既可帮助读者打好初一数学学习的基础，提高数学学习水平，又可破除对数学竞赛的神秘感，激发学习数学的兴趣，最终达到全国“希望杯”数学邀请赛和全国“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初中一年级的水平。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作初中数学竞赛的指导参考书。

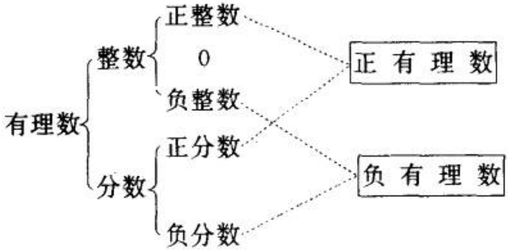
朱华伟

1998 年 5 月

目　　录

第一章　有理数

从算术到代数，数学进入一个全新的世界．由于表示具有相反意义的量的需要，引入了正、负数的概念．数的概念由小学算术中的数扩展到有理数．



为了研究有理数，引入数轴、相反数、绝对值等几个非常重要的基本概念，在此基础上，学习有理数的加减、乘除以及乘方运算的意义、法则和运算律．

这些内容都是初等数学的重要基础，要求同学们重视概念的学习，把数轴作为思维工具，深入理解绝对值的概念，熟练掌握有理数的运算法则、运算定理、运算顺序．

§1.1 有理数的意义

一 正数与负数

大于零的数 a 叫做正数，记作 $+a$ 或 $a(a>0)$，小于零的数 b 叫做负数，记作 $-b(b>0)$（在正数之前加"－"号，用以表示负数），零既不是正数，也不是负数，它是正数和负数的界限，它小于一切正数，而大于一切负数，是唯一的中性数.

例 1 比较 a 与 $-a$ 的大小.

分析 由于数系扩展到有理数系，字母代替的数字 a 不局限于正数和零，可以代替一切有理数，a 可以取正有理数，也可以取负有理数和零. 所以比较 a 与 $-a$ 的大小，要按不同情况分别讨论.

解 当 $a>0$ 时，a 为正数，$-a$ 为负数，所以 $a>-a$；

当 $a=0$ 时，$a=-a$；

当 $a<0$ 时，a 为负数，$-a$ 为正数，所以 $a<-a$.

注 不要不加分析就误认为 a 为正数，$-a$ 为负数，得出 $a>-a$ 的错误结论.

二 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴. 其中原点、正方向和单位长度称为数轴的三要素，只要画数轴，就应标明这三个要素.

数轴是存数的工具，每一个有理数在数轴上都有唯一的对应点，数 a 在数轴上的对应点叫做点 a. 这既打开了数形结合的

大门，又为理解有理数概念、比较有理数大小提供了有力的工具.

例 2 a,b,c 在数轴上的位置如图 1-1.

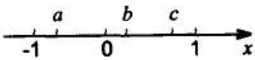


图 1-1

则在 $-\frac{1}{a},-a,c-b,c+a$ 中最大的一个是(　).

(A) $-a$　(B) $c-b$　(C) $c+a$　(D) $-\frac{1}{a}$

解 从图 1-1 可见，$-1<a<0,0<b<c<1$.

$\therefore$ $-1<c+a<1$. 又 $c-b<1-0=1$,

$\because$ $-1<a<0$, $\therefore$ $0<-a<1$, 故 $-\frac{1}{a}>1$.

因此，$-\frac{1}{a},-a,c-b,c+a$ 中最大的一个是 $-\frac{1}{a}$. 选(D).

注 在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大. 因此，正数都大于 0，负数都小于 0，正数大于一切负数. 这些结论对比较有理数大小非常有用.

例 3 数轴上坐标是整数的点称为整点，某数轴的单位长度是 1 厘米，若在这个数轴上随意画出一条长为 1995 厘米的线段 AB，则线段 AB 盖住的整点有(　　)个.

(A) 1994 或 1995　(B) 1994 或 1996

(C) 1995 或 1996　(D) 1995 或 1997

解 若所画的长为 1995 厘米的线段的两个端点 A 与 B 均为整点时，此时线段 AB 盖住的整点个数是 $1995+1=1996$ 个；若 A 不是整点，则 B 也不是整点，此时线段 AB 盖住的整点个数为 1995 个，所以长为 1995 厘米的线段盖住的整点有 1995 或 1996 个. 选(C).

例 4 若 a 为有理数,在 $-a$ 与 a 之间有 1997 个整数,问 a 的取值范围是什么?

解 因 a 与它的相反数 $-a$ 关于原点 0 对称,所以它们之间包含的整数个数为奇数,设为 $2n+1$ 个,则 $2n+1=1997$,解之得 $n=998$. 即正半轴、负半轴上各有 998 个整数.

若 $a>0$,则 $998\leqslant a<999$;

若 $a<0$,则 $-999<a\leqslant-998$.

故 a 的取值范围是 $-999<a\leqslant-998$ 或 $998\leqslant a<999$.

注 在数轴上原点的两旁到原点距离相等的两个点对应的数互为相反数,即其中一个数是另一个数的相反数,数 a 的相反数记为“$-a$”,零的相反数仍然是零.

三 绝对值

数 a 的绝对值,记为 $|a|$,

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

$|a|$ 表示了两个相反数 a,$-a$ 的共同特征:它们在数轴上到原点有相同的距离. 即 $|a|$ 表示点 a 到原点的距离. 而距离没有负数,所以,数 a 的绝对值非负,即 $|a|\geqslant 0$. 于是,绝对值可以作为沟通旧数(小学学的算术数)与新数(中学所学的有理数)之间的桥梁,把有理数大小比较化归为非负数(即算术数)的大小比较. 即

对于两个负数,绝对值大的反而小,绝对值小的反而大.

例 5 已知 a,b 互为相反数,c,d 互为倒数,m 的绝对值等于 2,p 是数轴上表示原点的数,求 $p^{2000}-cd+\frac{a+b}{abcd}+m^2$ 的值.

解 $\because$ a,b 互为相反数， $\therefore$ $a+b=0$.

$\because$ c、d 互为倒数， $\therefore$ $cd=1$.

$\because$ p 是数轴上表示原点的数， $\therefore$ $p=0$.

$\because$ $|m|=2$， $\therefore$ $m^2=4$.

故原式$=0-1+0+4=3$.

例 6 已知 $a>0,b<0,a<|b|$，请用“$<$”号将 $-a,a,-b,b$ 依次连结起来.

解 如图 1-2，在数轴上直观表示. 由 $a>0,b<0$ 知表示 a、b 的点分别在数轴上原点的右边和左边，且由 $a<|b|$ 和 $a>0$ 知 $|a|<|b|$，所以表示 a 的点离原点较近. 因 $-a$、$-b$ 分别为 a、b 的相反数，可以标出它们的位置. 从图中的位置可见，$b<-a<a<-b$ 成立.

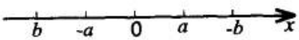


图 1-2

例 7 设 $P=-\dfrac{1}{12345\times12346}$，　$Q=-\dfrac{1}{12344\times12346}$，$R=-\dfrac{1}{12344\times12345}$，试比较 P、Q、R 的大小.

解 $\because$ $12344<12345<12346$，

$\therefore$ $12344\times12345<12344\times12346<12345\times12346$，

从而$\dfrac{1}{12344\times12345}>\dfrac{1}{12344\times12346}>\dfrac{1}{12345\times12346}$，

故$-\dfrac{1}{12344\times12345}<-\dfrac{1}{12344\times12346}<-\dfrac{1}{12345\times12346}$.

所以 $R<Q<P$.

例 8 比较$-\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{8},-\dfrac{15}{23},-\dfrac{10}{17},-\dfrac{12}{19}$的大小.

分析与解 根据有理数大小比较法则，可转化为比较 5 个

分数$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{23}$，$\frac{10}{17}$，$\frac{12}{19}$的大小. 要比较分数大小，通常的做法是通分，再比较分子的大小，这道题的 5 个分母通分，公分母是个很大的数，算起来很复杂. 如果我们换个角度思考：将 5 个分数的分子换成相同的数，再比较分母的大小. 也就是说，先找出分子的最小公倍数 60，再将这些分数进行等值变换，5 个分数依次等于：

$$\frac{60}{90},\frac{60}{96},\frac{60}{92},\frac{60}{102},\frac{60}{95}.$$

$$\therefore\quad \frac{60}{102}<\frac{60}{96}<\frac{60}{95}<\frac{60}{92}<\frac{60}{90}.$$

即 $$\frac{10}{17}<\frac{5}{8}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad -\frac{10}{17}>-\frac{5}{8}>-\frac{12}{19}>-\frac{15}{23}>-\frac{2}{3}.$$

四 有理数的表示法

有理数是整数与分数的统称. 由于整数可以看作分母为 1 的分数，所以有理数都是两个整数的比. 由此可见，任何一个有理数都可以化为$\frac{m}{n}$（m,n 为整数，$n\neq0$，m,n 互质）的形式. 反过来，任何一个可以表示为$\frac{m}{n}$（m,n 为整数，$n\neq0$，m,n 互质）这种形式的数，一定是有理数.

例 9 求证：两个有理数的和仍是有理数.

分析 只要设法证明两个有理数的和可以表示为$\frac{m}{n}$的形式就可以了.

证明 设两个有理数分别为$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，其中 a,b,c,d 是整数，并且 $b\neq0$，$d\neq0$.

$\because \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$,

而两个整数的和与积仍是整数，

$\therefore \quad ad+bc$、bd 都是整数.

$\therefore \quad \frac{ad+bc}{bd}$是有理数.

故$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$是有理数. 即两个有理数的和仍是有理数.

注 一般地有，有理数加、减、乘、除(除数不为零)运算结果仍为有理数. 这一性质叫做有理数的封闭性.

例 10 求证：任意两个不等的有理数之间存在无限多个有理数.

证明 设任意两个有理数 a,b，且 $a\neq b$ $(a<b)$.

$\because \quad \frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}>0, \frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}<0$,

$\therefore \quad a<\frac{a+b}{2}<b$.

$\because \quad a,b$ 为有理数， $\therefore \quad \frac{a+b}{2}$也为有理数.

即在 a,b 之间存在有理数$\frac{a+b}{2}$.

同理，a 与$\frac{a+b}{2}$，$\frac{a+b}{2}$与 b 之间也存在有理数. 这一过程可以无限地进行下去，所以 a,b 之间存在无穷多个有理数.

注 这一性质叫做有理数的稠密性，它表明无论两个有理数多么接近，在它们之间仍有无限多个有理数. 在数轴上，表现在任意两个有理点之间都存在无限多个有理点(数轴上坐标是有理数的点叫做有理点).

习题 1.1

A 级

1. $-|-a|$是(　).

(A)正数　(B)负数　(C)非正数　(D)0

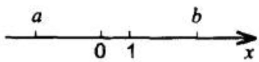
2. 数$-1.1,-1.01,-1.001,-1.0101,-1.00101$中最大的一个是(　).

(A)-1.00101　(B)-1.01　(C)-1.001　(D)-1.0101

3. 如果$a<0$,则a与它的相反数的差的绝对值是(　).

(A)0　(B)a　(C)$-2a$　(D)$2a$

4. a,b为有理数,在数轴上如图所示,则(　).



(第 4 题)

(A)$\frac{1}{a}<1<\frac{1}{b}$　(B)$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<1$

(C)$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<1$　(D)$1<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

5. 如果a,b均为有理数,且$b<0$,则$a,a-b,a+b$的大小关系是(　).

(A)$a<a+b<a-b$　(B)$a<a-b<a+b$

(C)$a+b<a<a-b$　(D)$a-b<a+b<a$

6. 已知a,b互为相反数,c,d互为倒数,x的绝对值等于它的相反数的2倍,则$x^3+abcdx+a+bcd$的值是____.

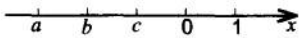
7. 已知$3a-5$和$-2a+3$的值互为相反数,则$a=$____.

8. 在下表所填的16个数中,最大的一个是____.

-1.1	-2.2	-3.3	-4.4
-1.21	-95	-1.001	-3

−4.5	−1.01	−1.41	−3.01
−19	−1.31	−3.001	−1.0101

9. a,b,c 在数轴上的位置如图所示.



(第 9 题)

则在$\frac{1}{a-b}$,$\frac{1}{c-b}$,$\frac{1}{a-c}$中,最大的是____.

10. 若$|x-y+3|$与$|x+y-1995|$互为相反数,则$\frac{x+y}{x-y}$的值是____.

11. a 是有理数,下列说法对吗?若不对,应附加什么条件使之成立?

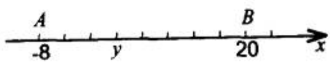
(1)$-a$ 是负数; (2)$2a$ 是偶数; (3)$|a|$是正数

(4)$3a>2a$; (5)$a+3>a$; (6)$a+3>3$;

(7)$a^2>0$; (8)$a^2>a$.

12. 比较$-\frac{3.85}{2.57}$,$-\frac{1534}{1023}$,$-\frac{487}{325}$,$-\frac{267}{178}$的大小.

13. 如图,数轴上标出的点中任相邻两点间的距离都相等,问 y 的值应是多少?



(第 13 题)

B 级

1. 当 $a=-0.01$ 时,在$-(-a)^2$,$-|-a|$,$-a^2$,$-(-a^2)$中,其值为正数的是( ).

(A)$-(-a)^2$ (B)$-|-a|$ (C)$-a^2$ (D)$-(-a^2)$

2. 如果$\frac{a}{b}=0$,那么有理数 a、b( ).

(A)都是零 (B)互为相反数 (C)互为倒数 (D)不都是零

3. 在-0.1428 中用数字 3 替换其中的一个非 0 数码后,使所得的数