中央电视台专题讲座教材

初中数学奥林匹克基础知识及题解

修订版·初一

陶文中主编

科学技术文献出版社

初中数学奥林匹克

基础知识及题解

修订版·初一

主　编　陶文中
副主编　齐振东　揭　英
　　　　欧阳红兵
撰稿人　李光华　蔡晓东　李芳宜
　　　　王永俊　田琪琨　陈　娴
　　　　赵一西　郑　康

科学技术文献出版社

（京）新登字 130 号

初中数学奥林匹克
基础知识及题解

修订版·初一

陶文中　主编

科学技术文献出版社出版
（北京复兴路 15 号　邮政编码 100038）
北京市通县燕山印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092 毫米　32 开本　10 印张　215 千字
1996 年 1 月第 2 版　1996 年 1 月第 2 次印刷
印数：5001－8000 册
ISBN 7-5023-1876-3/G·470
定　价：10.00 元

奥林匹克书库

修订版·初中

主　编　陶文中

副主编　齐振东　揭　英
　　　　欧阳红兵

编　委　（按姓氏笔划为序）
　　　　王永俊　田琪琨　刘际榛
　　　　齐振东　李光华　李芳宜
　　　　芦　萍　陈　娴　欧阳红兵
　　　　全宝铮　郑　康　赵一西
　　　　凌文伟　陶文中　揭　英
　　　　蔡晓东

前　言

近几年来，中小学数学奥林匹克方兴未艾。从 1986 年开始的全国“华罗庚金杯”少年数学竞赛算起，已举办了三届，吸引了全国百余万中小学生参加。规模之大令人瞩目。一年一度的全国初中数学联赛和高中数学联赛，已成为衡量我国中学生数学奥林匹克竞赛水平的权威性考试。从小爱数学，从小赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助中小学生的数学奥林匹克学习，在今后的数学竞赛中取得更好的成绩，我们结合多年数学奥校辅导的经验，在整理竞赛辅导讲义的基础上，编写了《小学数学奥林匹克基础知识及题解》、《初中数学奥林匹克基础知识及题解》及《高中数学奥林匹克基础知识及题解》这三套课外读物。这三套丛书共九册，其中小学四册（三、四、五、六年级各一册），初中三册（初一、初二、初三各一册），高中上、下两册。各册书紧密配合本年级的教学进度，选择基础性强，应用性广的重点教学内容作为专题。同时又根据数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型、新颖，注意广度和深度，例题讲解富有启发性，注重从方法上，从能力培养的角度上多方 探究解题思路。每讲最后都有小结，便于读者掌握要领。同时还配备了一定数量的练习，并附提示与解答。

参加本书编写工作的有李光华(第一、六讲)、蔡晓东(第二讲)、李芳宜(第三、四讲)、王永俊(第五讲)、田琪琨(第七讲)、陈娴(第八、十一讲)、赵一西(第九讲)和郑康(第十、十二讲)。

我们希望这三套丛书能为提高中小学生数学能力水平有所裨益。书中如有疏漏或错误之处,欢迎读者批评指正。

编者

1996 年 1 月

目　录

第一讲　有理数

在小学学过自然数、0和正分数(小数),这些数统称为算术数。到初一后,由于引入了相反意义的量,出现了负数,因而整数(包括正整数、负整数和0)和分数(包括正分数、负分数)统称有理数。本章将对有理数的定义和性质、有理数的绝对值、比较大小及运算等进行较深入的学习,在理论上和计算上都有所提高。

一、有理数的定义、性质

1. 有理数的定义

除课本上定义外,有理数还可以这样定义:能够表示成分数$\frac{p}{m}$形式的数(其中m、p为整数,$m\neq0$),称为有理数。

任意整数n,均可以表示成$\frac{n}{1}$,即整数可以写成分数形式。所以整数和分数都可具有$\frac{p}{m}$的形式,这个定义与原定义是等价的。

例1　若数$x^2=2$,称x是2的一个正的平方根,记作$\sqrt{2}$。也就是说$(\sqrt{2})^2=2$,那么请证明,$\sqrt{2}$不是有理数。

证明　假设$\sqrt{2}$是有理数,那么,$\sqrt{2}=\frac{p}{m}$($m\neq0$,且m、p互质,这是因为若m、p不互质,我们可以约分,至m、p互质。)

于是 $$(\sqrt{2}^2)=\frac{p^2}{m^2},2=\frac{p^2}{m^2}$$

$$2m^2=p^2\text{（这式子表明 2 是 } p \text{ 的因数）}$$

设 $$p=2k\text{，那么 }2m^2=4k^2$$

$$m^2=2k^2\text{（这式子表明 2 是 } m \text{ 的因数）}$$

∴ m 也是偶数。这样 m、p 有公因数 2，与 m、p 给定互质相矛盾。故假设错误，即 $\sqrt{2}$ 一定不是有理数。这种证题方法称作反证法。

2. 有理数的性质

1. 有理数具有顺序性。即指任意两个有理数 a、b，在 $a>b$，$a=b$，$a<b$ 三种关系中，有一种而且仅有一种是成立的。

2. 有理数具有对加、减、乘、除（0 不为除数）四则运算的封闭性。这是指任意两个有理数的和、差、积、商（0 不为除数）还是有理数。

3. 有理数具有稠密性。即指任意两个有理数之间总存在一个有理数。

例 2 试证在所有比给定的有理数 a 大的有理数中，没有最小的数。

证明 假设在所有比 a 大的有理数中，b 是最小的。根据有理数的稠密性，那么一定存在有理数 c，使 $a<b<c$，c 也比 a 大。这就与 b 是最小的比 a 大的数相矛盾。所以在所有比 a 大的有理数中，没有最小的。

二、有理数的绝对值

1. 定义

绝对值是个很重要的概念，它的代数定义是：正数的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。

用式子表达，即

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ -a & (a<0)\\ 0 & (a=0)\end{cases}$$

要注意 $a=0$ 时，$|a|$的表达其实有三个形式：a、$-a$ 和 0，当然一般用 0。

根据绝对值的定义，可以得出一个重要形式：$|a|\geqslant 0$。

例 3　$|a|>-a$，对吗？

解　不对，当 $a\leqslant 0$ 时，$|a|=-a$

同理，我们还可以对$|a|$与 a 的大小进行类似的讨论。这样得到$|a|\geqslant a$ 与$|a|\geqslant -a$ 都是正确的。这是一个有用的结论。

2. 绝对值的几何意义

$|a|$的几何意义是：在数轴上，表示这个数的点离开原点的距离。

由上述意义，我们不难理解$|a|<5$ 是指：数轴上表示数 a 的点与原点距离小于 5，所以 a 在 -5 与 5 之间取值，且不包括 5、-5、(如图 1-1)，而$|a|=5$，则表示 a 在 -5 与 5 外侧取

值，且也不包括 5、-5（如图 1-2）。

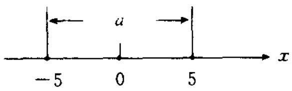

图1-1

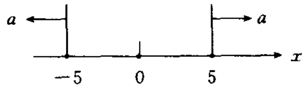

图1-2

绝对值$|x-a|$表示点 x 和点 a 的距离，这些结论是很重要的。

例 4　若$|a+b|>|a-b|$，a、b 如何取值?

解　若 $b=0$，则$|a|>|a|$不可能成立。$\therefore b\neq0$

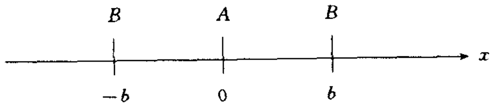

图1-3

若 $b>0$，如图 1-3，原不等式表示点 A 到点 $B'(-b)$的距离，大于点 A 到点 $B(b)$的距离。由图，若 A 落在原点处，则 A 点与 B、B'距离相等，若 A 点向右移，自然离 B 点近，离 B'点远。由此可知 A 在 0 的右侧，即 $a>0$。

同理可知若 $b<0$ 时，$a<0$

$\therefore$ a、b 必须同号。

例 5　若$|x+5|+|x-2|=7$，求 x 的取值范围。

解法 1　用轴上标根法解。点-5 和点 2 把数轴分为三段，$x\leqslant-5$，$-5<x\geqslant2$，$x>2$，对每一区间分别讨论（其中-5、2 称为零点，即它们分别使 $x+5=0$，$x-2=0$）。

$$(1)\begin{cases}x\leqslant-5\\-(x+5)-(x-2)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant-5\\-2x=10\end{cases}\Rightarrow x=-5$$

(2) $\begin{cases}-5<x\leqslant 2\\x+5-(x-2)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5<x\leqslant 2\\7=7\end{cases}\Rightarrow -5<x\leqslant 2$

(3) $\begin{cases}x>2\\x+5+x-2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\2x=4\end{cases}\Rightarrow$无解。

$\therefore -5\leqslant x\leqslant 2$ 为解。

解法 2 用几何法解。原式表示点 x 到点 -5 和点 2 的距离和为 7。而点 -5 和点 2 已经相距 7 个单位，故点 x 必须在点 -5 和点 2 之间运动(包括端点)，$\therefore -5\leqslant x\leqslant 2$

例 6 $|x+3|-|x-2|>7$，求 x。

解法 1 用轴上标根法解。

(1) $\begin{cases}x\leqslant -3\\-(x+3)+(x-2)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -3\\-5>7\end{cases}\Rightarrow$无解；

(2) $\begin{cases}-3<x\leqslant 2\\(x+3)+(x-2)<7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3<x\leqslant 2\\x>3\end{cases}\Rightarrow$无解；

(3) $\begin{cases}x>2\\(x+3)+(x-2)>7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\5>7\end{cases}\Rightarrow$无解。

$\therefore$ 原不等式无解。

解法 2 用几何法解。

$|-3-2|=5$，即点 -3 与点 2 相距 5 个单位。

若点 x 在 -3 与 2 的正中间，即 $x=-0.5$ 时，点 x 到点 2 和点 -3 距离相等，原式要求点 x 到点 -3 比到点 2 距离大，所以点 x 应向点 2 靠拢，但由图可知点 x 在 -3 到 2 间运动时，距离差肯定小于 5；当点 x 与点 2 重合时，距离差为 5，所以点 x 需继续右移。但无论点 x 在点 2 右边何处，它到点 -3 与到点 2 距离还是 5，不会

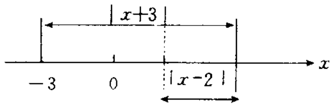

图1-4

比 7 大(如图 1-4)。

∴ 原不等式无解。

例 7 m 是有理数,求下式的最小值:

$$|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$$

解 用几何法解。

(1)如图 1-5,若 M 点在点 2 的左侧(包括点 2),由图:

$$|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$$
$$\geqslant|m-4|+|m-6|+|m-8|$$
$$\geqslant 2+4+6=12$$

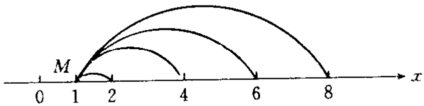

图1－5

易见,点 M 在点 8 的右侧(或位于 8 上)也有同样的结论;

(2)如图 1-6,若点 M 在点 2 和点 4 间运动(不包括 2、4),由图:

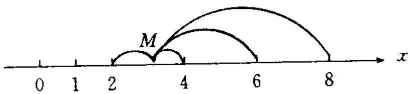

图1－6

$$|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$$
$$=2+|m-6|+m-8|>2+2+4=8$$

易见,点 M 在点 6 和点 8 间运动(不包括点 6、8),也有同样的结论;

(3)如图 1-7,若点 M 在点 4 或点 6 间运动(包括点 4 和点 6)则:

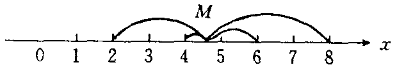

图1-7

$$
\begin{aligned}
&|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|\\
=&(|m-2|+|m-8|)+(|m-4|+|m-6|)\\
=&6+2=8
\end{aligned}
$$

所以，原式最小值为 8。

三、有理数大小的比较

我们已经知道，正数$>0>$负数，而两个负有理数比大小，绝对值大的反而小。

比较两个数的大小，可以用比差法。若 $a-b>0$，则 $a>b$；若 $a-b=0$，则 $a=b$；若 $a-b<0$，则 $a<b$。两个正有理数比大小，也可用比商法，令 $a>0,b>0$，若$\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$；若$\frac{a}{b}=1$，则 $a=b$；若$\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$。

例 8　比较两个正有理数 a^2b 与 ab^2 的大小。

解　可用比差法：$a^2b-ab^2=ab(a-b)$

$\because$ $a^2b>0,ab^2>0$，而 $a^2>0,b^2>0$　（不会是 0!）

$\therefore$ a、b 均是正数，即有 $ab>0$

故　若 $a>b$，则 $a^2b-ab^2>0$，即 $a^2b>ab^2$；

若 $a=b$，则 $a^2b-ab^2=0$，即 $a^2b=ab^2$；

若 $a<b$，则 $a^2b-ab^2<0$，即 $a^2b<ab^2$

例 9　a_1、a_2、$a_3\cdots a_{1991}$都是有理数，设：

$M=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1990})\cdot(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{1990}$

$+a_{1991})$

$N=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1990}+a_{1991})\cdot(a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{1990})$

试比较 M、N 的大小。

思路分析 用比差法。注意到 M、N 均是两个数的乘积，且两个因数中都有相同的和，考虑设辅助未知数。

解 设$x=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{1990}$

$y=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{1991}$

则 $M=xy, N=(x+a_{1991})\cdot(y-a_{1991})$

$$\begin{aligned}M-N&=xy-[(x+a_{1991})\cdot(y-a_{1991})]\\&=xy-[xy+a_{1991}\cdot y-a_{1991}\cdot x-a_{1991}^2)]\\&=a_{1991}(x-y)+a_{1991}^2\\&=a_{1991}(a_1-a_{1991})+a_{1991}^2\\&=a_1\cdot a_{1991}\end{aligned}$$

由此可知，(1)若 $a_1\cdot a_{1991}>0$，则 $M>N$；

(2)若 $a_1\cdot a_{1991}=0$(两数中至少有一个为 0)，则 $M=N$；

(3)若 $a_1\cdot a_{1991}<0$，则 $M<N$。

例 10 若 p、q、t 都是自然数，比较$\frac{p+t}{q+t}$与$\frac{p}{q}$的大小($p\neq q$)。

解 用比差法。

$$\frac{p+t}{q+t}-\frac{p}{q}=\frac{pq+tq-pq-tp}{q(q+t)}=\frac{t(q-p)}{q(q+t)}$$

$\because$ p、q、t 均是正数，$\frac{t}{q(q+t)}>0$

(1) 若 $q>p\Rightarrow q-p>0\Rightarrow\frac{t(q-p)}{q(q+t)}>0$

即 $$\frac{p+t}{q+t}>\frac{p}{q}$$

(2) 若 $q<p\Rightarrow q-p<0\Rightarrow\frac{t(q-p)}{q(q+t)}<0$

即 $$\frac{p+t}{q+t}<\frac{p}{q}$$

本题告诉我们，在真分数的分子、分母上同加一个相同的自然数，值变大了。例如：$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，$\frac{7}{11}<\frac{14}{18}<\frac{21}{25}$；若是个假分数，分子、分母同加一个相同的自然数后，分式值变小了。例如 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}>\frac{5}{4}$，$\frac{11}{7}>\frac{18}{14}>\frac{25}{21}\cdots$

例 11　将 $\frac{18}{19}$，$\frac{198}{199}$，$\frac{1998}{1999}$ 按从小到大的顺序排列起来。

解　利用上题结论：

$$\frac{18}{19}<\frac{18+180}{19+180}=\frac{198}{199}<\frac{198+1800}{199+1800}=\frac{1998}{1999}$$

$$\therefore\frac{18}{19}<\frac{198}{199}<\frac{1998}{1999}$$

例 12　如果 $t>0$，$x<y$，试证 $\frac{x+yt}{1+t}$ 必在 x、y 之间。

思路分析 1　用比差法。

证法一　$$\frac{x+yt}{1+t}-x=\frac{x+yt}{1+t}-\frac{x+xt}{1+t}=\frac{t(y-x)}{1+t}>0$$

$$\frac{x+yt}{1+t}-y=\frac{x+yt}{1+t}-\frac{y+yt}{1+t}=\frac{x-y}{1+t}<0$$

$$\therefore\ x<\frac{x+yt}{1+t}<y$$

思路分析 2　本题也可以从分数中分离出数 x、y 来，再行比较大小。

证法二　$$\frac{x+yt}{1+t}=\frac{x+xt-xt+yt}{1+t}=x+\frac{(y-x)\cdot t}{1+t}>x$$

$$(y-x)>0, 1+t>0)$$

$$\frac{x+yt}{1+t}=\frac{x-y+y+yt}{1+t}=y+\frac{x-y}{1+t}<y$$

$$(x-y<0, 1+t>0)$$

$$\therefore\ x<\frac{x+yt}{1+t}<y$$

本题所涉及的方法，对解决某些分数问题，显得方便些。

例 13　能使 n^2+10 被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值是多少？

解　采用例 12 的方法，先把商的整数部分分离出来。

$$\frac{n^2+10}{n+10}=\frac{(n^2+10n)-(10n+100)+110}{n+10}$$

$$=(n-10)+\frac{110}{n+10}$$

当 $n+10$ 是 110 的约数时，商为整数，而 110 的最大约数是 110。

令 $n+10=110, n=100$

四、有理数的运算

1. 有理数运算

(1)对于有理数的四则运算法则，应注意本着“先符号，后绝对值”的顺序运算，养成良好习惯；

(2)有理数运算仍然满足：

加法交换律　$a+b=b+a$

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律　$a\cdot b=b\cdot a$

乘法结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$