稳定性基本理论与 Lyapunov 函数构造

段魁臣 编著

新疆大学出版社

稳定性基本理论与
Lyapunov函数构造

段魁臣 编著

新疆大学出版社

1990年6月

稳定性基本理论与Lyapunov函数构造

段魁臣　编著

新疆大学出版社出版发行

(乌鲁木齐市胜利路14号　邮政编码：830046)

新疆新华印刷三厂印刷

850×1168毫米　1/32　195千字　7.5印张

1990年6月第1版　1990年6月第1次印刷

印数：1——1 000册

ISBN7-5631-0115-2/G·61　定价：4.80元

内 容 提 要

本书较系统地介绍了古典李雅普诺夫定理及对这些定理的改进，介绍了近10年来稳定性理论的主要研究成果，从中可了解到稳定性理论的发展状况。本书还特别系统地介绍了构造李雅普诺夫函数的方法。

全书共分四章：第一二章介绍驻定和非驻定李雅普诺夫定理和这些定理的改进；第三章系统地介绍李雅普诺夫函数的构造；第四章讨论了第一、第二、第三种临界情形。

本书可作为高等学校高年级选修课和研究生教材，特别可作为与本专业相联系的工科大学研究生教材，也可供工程技术人员参考。

目　　次

序

自1892年李雅普诺夫（ЛЯПУНОВ）发表了他的《运动稳定性一般问题》论文以来，稳定性理论得到蓬勃发展。现在李雅普诺夫第二方法，已广泛地应用到定性理论、差分方程理论以及电学等各个方面。

本书介绍了古典的李雅普诺夫理论和现代对李雅普诺夫古典理论的发展，从而可从本书系统地了解李雅普诺夫理论的全貌。

李雅普诺夫理论核心问题是构造李雅普诺夫函数，本书系统地介绍了构造李雅普诺夫函数的各种方法，对构造李雅普诺夫函数有较好工作的Ezeilo也作了系统的介绍。

本书的特点是既有古典李雅普诺夫理论，也有对它的现代发展，特别是对构造李雅普诺夫函数上作了系统的介绍。

作者多年从事稳定性教学和科研工作，在书中加入作者的一些研究成果，我们相信本书的出版，必能对研究和学习这方面专业的高年级学生和研究生有所裨益，对促进这门学科在我国传播与应用有所裨益，自然，这也是本书作者的最大愿望。

王　联　王慕秋

1989年8月5日
于乌鲁木齐

第一章　稳定性基本理论

§1　问题的提出

伟大的俄国学者李雅普诺夫，自19世纪90年代开创这个理论以来，稳定性理论在世界各国引起极大兴趣，在物理、工程技术各个部门，获得广泛应用。

Lyapunov意义下的运动稳定性理论，是研究干扰因素对于物质系统运动的影响，所谓干扰性因素应理解为那些在描述运动时，由于与基本力相比甚小，而未曾加以考虑的力。这些力通常是不确切的，它们可以是瞬间的作用，因而引起物质系统的初始状态的微小变化。

微小的干扰因素对于物质系统运动的影响，对于不同的运动是不一样的。对于一些运动影响并不显著而受干扰运动与不受干扰运动相差很少。反之，对于另一些运动，干扰的影响就可能很显著，以致于干扰的力无论多么小，受干扰的运动与不受干扰的运动随着时间的推移而可能相差得很大。简单的说，属于前者的运动称为稳定的，而属于后一类型的运动则称为是不稳定的。

运动稳定性理论就是要建立一些准则，用以判断所考察的运动是稳定的或是不稳定的。因为在实际情况中，干扰因素总是不可避免地存在着，所以运动稳定性即有很重要的理论意义与实际意义，这也是运动稳定性理论近年来蓬勃发展的原因。

应注意：

（1）关于平衡态的稳定与不稳定，是根据平衡位置附近所发生的运动之性质来判断的。

（2）对于稳定的平衡状态，必须是：只要适当地选取系统离平衡位置的初始差值和初始速度，就可以使这些差值在整个过程中总小于任意事先指定的小正数。

（3）如单摆的重心位于固定点下方时，就具有稳定性质，反之，就不是稳定的。因为：只要摆偏离垂直位置，无论怎样选择它的初始条件，都不可能使单摆与平衡位置之差小于某个预先给定的数值。（如图1、2）

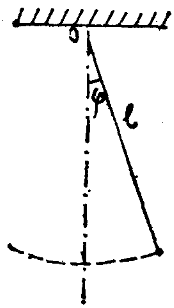

图 1

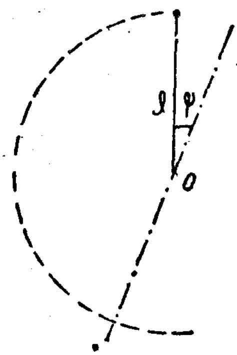

图 2

运动稳定性概念，是平衡态稳定性的直接推广。假如所考虑的是动力系统可用下列微分方程组描述。

1.1 什么叫 Lyapunov 稳定性

设
$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i\ (t,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.1}$$

其中y_i是某些与动力系统有关的参数，如坐标和速度等，或更一般地是坐标和速度的函数等等。

考虑这个系统的任何特殊运动，对应于（1.1）的某个特解：

$y_i=f_i(t)$ $(i=1\cdots n)$，我们称这个运动是未受干扰的，这个系统的其他运动$y_i(t)$我们称为受干扰运动，它们的差值：$y_i(t)-f_i(t)$称为扰动或干扰.

下面我们给出Lyapunov 意义下稳定和渐近稳定的定义。

定义1 如果对于任意正数ε，无论它多么小，总可以找到另一个正数η(ε)，使得对于所有受干扰运动$y_i=y_i(t)$，只要在初始时刻$t=t_0$满足不等式：

$$|y_i(t_0)-f_i(t_0)|\leqslant\eta(\varepsilon)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2}$$

就对于所有$t\geqslant t_0$满足不等式：

$$|y_i(t)-f_i(t)|<\varepsilon \tag{1.3}$$

则称未受干扰的运动$f_i(t)$对量$y_i(t)$（受干扰运动）是稳定的。

如果未受干扰的运动不是稳定的，即：对于某个很小的$\varepsilon>0$可以找到$\delta(\varepsilon)$，使$|y_i(t_0)-f_i(t_0)|\leqslant\delta(\varepsilon)$，但在某一时刻$t_1>t_0$，必有：$|y_i(t_1)-f_i(t_1)|\geqslant\varepsilon$.$(i=1\cdots n)$

若未被干扰运动不但是稳定，而且当初始扰动足够小时，随时间无限增加，所有受干扰运动都逐渐趋于未受干扰运动，这时，我们说，未受干扰运动是渐近稳定的，即：任意给定$\varepsilon>0$，总可以找到$\eta(\varepsilon)$，当$|y_i(t_0)-f_i(t_0)|\leqslant\eta(\varepsilon)$时，对于所有$t\geqslant t_0$满足$|y_i(t)-f_i(t)|<\varepsilon$，而且

$$\lim_{t\to+\infty}y_i(t)=f_i(t)\quad(i=1,\cdots,n)$$

要对方程（1.1）来研究特解$y_i=f_i(t)$相对于$y_i(t)$的稳定性，一般来说比较困难，为此，我们对于（1.1）进行坐

标变换：令

$$x_i = y_i - f_i\ (t) \tag{1.4}$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \frac{dy_i}{dt} - \frac{df_i}{dt} \\ &= Y_i\ (t; x_1(t) + f_1\ (t)\ ,\ \cdots,\ x_n\ (t) + f_n\ (t)) \\ &\quad - Y_i\ (t; f_1\ (t)\ ,\ \cdots,\ f_n\ (t)\ )\end{aligned}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\ (t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \tag{1.5}$$

这样一来，就可以将研究方程组（1．1）的特解 $y_i(t) = f_i\ (t)$ 的稳定性问题，化为研究系统（1．5）的平凡解的稳定性问题，这就较方便了。

这时的 Lyapunov 稳定性定义，可表为下述形式：

定义2 如对于任何正数ε，无论它多么小，都可以选取另一正数η（ε），使得对于所有受干扰运动，只要在初始时刻 t_0 时满足

$$|\ x_i\ (t_0)\ | \leqslant \eta\ (\varepsilon) \tag{1.6}$$

就在所有 $t > t_0$ 时满足：

$$|\ x_i\ (t)\ | < \varepsilon \tag{1.7}$$

则称（1．5）的未被扰动的运动 $x_i = 0$ 是稳定的，反之，则称 $x_i = 0$ 是不稳定的（$i = 1,\ \cdots,\ n$）

如 $x_i = 0$ 是稳定的，并且数η选得如此之小，使得满足(1·6)的扰动运动，都满足条件：

$$\lim_{t\to+\infty} x_i\ (t)\ = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

则称 $x_i = 0$ 是渐近稳定的。

例1．讨论方程 $\frac{dx}{dt} = 0$ 的零解的稳定性。

解：（$i = 1$）设初值为 $x\ (t_0)\ = x_0$，满足任意初始条件的

解为：$x=x_0$，只要取 $|x_0|<\delta\ (=\varepsilon)$ 就有 $|x|<\varepsilon$，故零解是稳定，但不是渐近稳定（∵ 解 $x=x_0$ 与 t 无关）

例2 一阶线性方程：$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{1+t}$，讨论 $x=0$ 的稳定性。

解 取初值为 $x(t_0)=x_0$，初值解为 $x(t,t_0,x_0)=\frac{1+t_0}{1+t}x_0$ （∵ $\frac{dx}{x}=-\frac{dt}{1+t}$，∴ $\ln x=\ln\frac{1}{1+t}+\ln C_0$，

∴ $x=\frac{C_0}{1+t}$ 而当 $t=t_0$ 时，$x_0=\frac{C_0}{1+t_0}$，∴ $C_0=(1+t_0)x_0$，代入即得）。当 $t_0\leqslant t$ 时，有

$$|x(t,t_0,x_0)|\leqslant|x_0|$$

只要取 $\delta=\varepsilon$，当 $|x_0|<\delta$ 时，有 $|x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon$，

∴ $x=0$ 是稳定的。

又知：$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t,t_0,x_0)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1+t_0}{1+t}x_0=0$，故 $x=0$ 是渐近稳定的。

例3 方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=0\end{cases}$$

$(i=2)$ 讨论 $x=0$，$y=0$ 的稳定性。

解 取初值为 $x(t_0)=x_0$，$y(t_0)=y_0$，满足初始条件的解为

$$\begin{cases}x=y_0(t-t_0)+x_0\\ y=y_0\end{cases}$$

无论 $|x_0|<\eta$，$|y_0|<\eta$ 多么小，总有 $|x|\geqslant\varepsilon$。

且当 $t\to+\infty$ 时，$x\to\infty$，故 $(0,0)$ 不稳定（相点 (x,y) 不趋于 $(0,0)$）。

对于解渐近为零，即当 $t\to+\infty$ 时，虽然有 $x\to0$，但零解不一

定稳定，故$x\to0$不包含稳定。

如：
$$\begin{cases} x=-3x+y \\ y=-3x \end{cases}$$
$(x_0\geqslant0)$在$(0,0)$不稳定，解组渐近为零。

以上例题是先求出方程通解，然后分析零解稳定性，如方程满足解的唯一性，但又求不到通解，那么怎样判断解的稳定性呢？（即不解方程，由方程右端函数x_i判断零解稳定性？）

从上述Lyapunov稳定性定义中看到几个特点：

（1）Lyapunov稳定性是局部概念，因此，初始扰动范围很小，即η较小，特别渐近稳定时，η更小。

（2）时间t的区间是无限长：$(t_0, +\infty)$。

（3）初始扰动的大小，与初始时刻t_0的选取无关。

（4）在初始扰动之后，无外界干扰。

（5）未被扰动和扰动运动服从同一方程，而且对二者在同一时刻进行比较。

1·2 解决问题的方法

如果我们能把方程的解求出来，那么对稳定性研究就不成问题了，但实际上解既存在又解不出来，这样，Lyapunov“运动稳定性一般问题”中提出了两个办法。

本课题主要用第二方法，即直接法来研究方程的稳定性，为了说明Lyapunov函数的思想实质，举下面简单例题：

例1. 如量：M连接在两个弹簧之间，在O点物体处于平衡状态，把M拉到$x>0$，则有一力f推动M指向平衡点，到O点后，继续有速度$v_0<0$，使M到$x<0$，这样往还，在O点振动，故是稳定的。

理论分析：

由牛顿第二定律得：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

令：$\varepsilon^2=\frac{k}{m}$叫圆频率，再令标准化（$\varepsilon^2=1$）

方程简化为：

$x+x=0$　　令$x=y$　则化为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y \quad &（动能）\\ \frac{dy}{dt}&=-x \quad &（势能）\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

$\because m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x) \Longrightarrow x=v$

$$mv=F(x)$$

第一式×F（x）dt－第二式×vdt　　得

$mVdt-F(x)\ dx=0$ 或$d\ (\frac{1}{2}mv^2-\int Fdx)=0$

$\therefore$首次积得：$\frac{1}{2}mv^2+\int -F(x)\ dx=C$

令$v(x)=\int -f(x)\ dx$　　上式化为

$\frac{1}{2}mv^2+v(x)=C$（1.8）即系统总能量。

对（1.8），势能　$v(x)=2x=\int_0^x kxdx=\frac{k}{2}x^2$

故（1.8）总能量：　$\frac{1}{2}my^2+\frac{k}{2}x^2=\frac{m}{2}(y^2+x^2)$

故有上式E。

这时系统的总能量的2倍为：

$$E(x,y)=(x^2+y^2) \tag{1.9}$$

$\therefore\frac{dE}{dt}=2xx'+2yy'=2xy-2xy=0$

这说明系统是一个保守系统（没有变化率），而（1.9）$E(x\cdot y)=x^2+y^2=R^2$为其次积分，这个曲线在$x-y$相平面上是同心圆族，R^2由初值x_0和初速x_0決定，的即$R^2=$