现代科学数系论

田开璞 著

山东科学技术出版社

现代科学数系论

田开璞　著

山东科学技术出版社

现代科学数系论

田开璞 著

*

山东科学技术出版社出版发行

（济南市玉函路 邮政编码 250002）

山东莒县印刷厂印刷

*

787mm×1092mm 1/16 开本 11.5 印张 249 千字

1998 年 4 月第 1 版 1998 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—1000

ISBN7—5331—2060—4

O · 69 定价：28.00 元

序

最初的数的概念和有关数的一些简单知识可以追溯到史前时期，是在人类实践活动的过程中产生的。但是，人类对数系的研究，是随着19世纪初开始的现代数学的发展，直至19世纪末、20世纪初才有了严格的基础，而科学数系的建立也是现代数学的一个重要内容。人们最早认识的数当然是自然数，在现代数学中自然数的理论是怎样的，又如何从自然数出发建立整数、有理数、实数、复数乃至“超复数”呢？在这本书中，作者按照现代数学的观点，从数学结构的角度出发，完成了建立严格、系统的科学数系的逻辑过程。

众所周知，数学结构的概念产生于20世纪30年代以后。法国一批年青有为的数学家形成的数学学派——布巴基学派(这个学派又被人们称为结构主义学派)把数学结构分为三大类：①代数结构，即由离散性加运算构成的结构系统，如群、环、域、代数系统、线性空间等；②序结构，如半序集、全序集、良序集等；③拓扑结构，能够描述极限的那种结构，如拓扑空间、紧致集、连续性及完备性空间等。这三大结构被称为现代数学的基础结构(母结构)，然后就有各种子结构，还可以由各种交叉形成分支结构，本书作者正是从自然数出发，按照上述数学结构的观点建立科学数系的。

本书第一章介绍了集合论的初步知识，给出了后面各章所必须的集合论中的一些基本概念以及近世代数中群、环、域的概念。很明显，这一章是全书的理论基础。从第二章到第六章，作者用五章的篇幅建立了自然数系、整数系、有理数系、实数系、复数系的完整理论。在第二章中叙述了自然数系的两种理论——基数理论和序数理论，这是建立数系的基础和出发点；在第三、四章中，作者首先用现代数学中的等价关系、等价类和商集合的概念分别给出了整数集、有理数集的定义，然后再定义这两个集合的运算，证明了整数集是环、有理数集是域，从而建立了整数集和有理数集的代数结构，又定义了整数和有理数的大小，建立了这两个集合的序结构，并证明了这两个数集的代数结构与序结构之间具有协调性，用数学结构的观点建立数系的典型例子莫过于实数系的建立；在第五章中，作者首先给出了实数系 **R** 的公理系统，这个公理系统充分表明实数系是三大基础结构的交叉结构，然后叙述了两种实数理论——康托尔的实数理论和狄特金的实数理论，在每一种实数理论中，作者分别叙述了 **R**

的代数结构(域)、序结构(全序)、拓扑结构(连续性或完备性结构),这样就证明了实数系 **R** 是完备的阿基米德全序域,它是代数结构、序结构和拓扑结构三者联合而成的具有协调性的一种交叉结构;在本书第六章中,作者用有序实数对定义了复数,然后建立了复数系的代数结构(域),并证明了复数系只能是半序域,即复数无大小可言,最后对所谓“超复数”——四元数和八元数作了简单介绍,以使读者对数系的扩充有一个全面的了解。引进超限数是康托尔集合论的一大贡献,与以前的有限数相比,超限数可以看作是数系向“无限”的扩充,作者在第七章中对超限基数和超限序数的理论作了简单的介绍,以使读者对超限数的基本知识有一个大致的了解。

综观全书,不难看出作者努力用现代数学的思想、观点和方法建立科学数系的过程。全书所叙述的数系的扩充过程,符合数系的扩充原则(第三章第一节),逻辑体系是严格的、完整的,完全按照数学结构的观点建立了科学的数系。即使作为学习科学数系的教科书,逻辑系统上也是严密的。作为一本用现代数学研究初等数学(数的知识习惯上认为是属于初等数学的内容)的专著,相信本书必能使读者对现代数学中的数系有一个全面而又系统的了解。

汪德营

1997 年 4 月于济南

前　　言

用现代数学的思想、观点和方法建立科学的数系，是现代数学的一个重要内容。但是，在高等学校数学系开设的各门课程中，所使用的教科书都是根据本课程的需要编写有关数的知识。例如，数学分析以及实变函数教材总要讲一点实数的知识，复变函数教材也要介绍复数的知识。这些教材对数的知识的叙述都是各取所需的，因而是不系统的。在为高等师范院校初等数学教材教法课而编写的教科书中，理应建立完整、系统的科学数系，但由于受教学时数的限制，亦难以完成这一任务。因此，直到现在，尚难以找到一本关于在现代数学中如何建立科学数系的书。这就出现了一个矛盾现象：一方面，学生从小学就开始学习数的知识，因而对数不可谓不熟悉；另一方面，学生一直学到大学（甚至大学数学系）仍然不能掌握现代数学中建立科学数系的完整理论。本书正是在这种实际背景下进行创作的。

本书首先按照皮亚诺的公理体系建立了自然数的理论，然后以自然数系为基础，用现代数学的结构观点，建立了整数系、有理数系、实数系、复数系的系统理论。作为一个建立科学数系的完整的逻辑过程，本书力求保证理论的系统性、论证的严密性。这样，就可以使读者系统地掌握在现代数学中建立科学数系的完整过程，从而实现本书写作的目的。

本书可以作为高等师范院校数学系初等数学教材教法课的参考书，也可以作为广大中学数学教师和数学爱好者学习科学数系的教科书。

作为一本用现代数学研究初等数学中关于数的理论的专门著作，限于本人的水平，书中还可能存在不少缺点错误，敬请广大读者批评指正。

山东省高等师范数学教育研究会理事长、山东轻工业学院院长汪德营教授对本书的写作给予了悉心指导，并为本书写了序言。对汪德营先生的热情帮助，在此谨表示衷心的感谢。

田开璞

1997 年 4 月

目　录

第一章　集合的初步知识

集合论是关于无穷集合和超限数的数学理论. 1870 年，德国数学家康托尔从证明“函数展开为三角级数的唯一性”开始研究无穷集合. 数学分析里间断函数求积分问题和三角级数收敛性问题的研究都要求能够从某一区间的所有点分离出另一无穷点集，而分离出的无穷集具有什么样的性质关系很大. 例如，从区间$[0,1]$分离出$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$和分离出 0 和 1 之间的所有有理数，这两个无穷集就具有很不同的性质. 因此，对无穷集合进行分类就成为必要的，正如康托尔所说，要把“无穷的各种关系弄得完全明朗”. 关于三角级数收敛的研究，康托尔于 1870，1871，1872 年共发表了 3 篇论文. 1870 年的论文证明，如果两个三角级数对任一 x 收敛且其和相等，那么这两个级数的系数相等；1871 年的论文把这一结论推广到存在着有限个例外点；1872 年的论文又把这一结论推广到有无限个例外点. 为了说明这里的无限个例外点集合的性质，康托尔在 1872 年的论文中对无穷集作了分类. 因此，可以把康托尔关于三角级数收敛点集性质的研究看作集合论的开始. 此后，康托尔又提出了一般的抽象集合，并研究了集合之间的一一对应问题，给出了基数与序数的概念，把有限序数推广到无限序数. 康托尔的这些开创性的研究，使他成为数学的一个崭新的分支——集合论的奠基人. 前苏联数学家柯尔莫戈洛夫[概率论中著名的第二次公理化(1933)的提出者]曾对康托尔和抽象集合论给出了很高的评价：康托尔的不朽功绩，在于他敢于向无穷大冒险迈进，他对似是而非之论、流行的成见、哲学的教条以及最大数学家的信念作了内外的斗争，由此使他成为一门新学科的创造者，这门学科在今日已成了全部数学的基础.

第一节　集合的一般概念

一、集合的概念

在朴素集合论(相对于公理集合论而言)中，集合是一个原始概念，它不再定义，只能描述. 所谓集合，就是每一组对象的全体，组成集合的每一个对象叫做这个集合的元素.

一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示集合；用小写字母 $a,b,c,\cdots$表示集合的元素.

集合论作为语言来说，它只有一个基本动词，叫做“属于”、用符号$\in$表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in} A$(或 $a\notin A$).

集合最基本的特征是要求能够明确判断任何一个事物是不是该集合的元素. 因此，像“高个子的人”、“美丽的画”，都不是集合.

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的. 也就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素. 因此、集

合中的元素没有重复现象.

表示集合的方法,常用的有列举法和描述法.把集合的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法,叫列举法.例如,由字母 a,b,c,d 组成的集合,可以用列举法表示

$$\{a,b,c,d\}$$

应该特别指出的是,用列举法表示集合时,不必考虑集合元素的顺序,$\{a,b,c,d\}$ 与 $\{b,a,d,c\}$ 是同一个集合.把集合的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做描述法.如果用 x 表示集合 A 的任意元素,用 $P(x)$ 表示 x 的性质或特征,那么集合 A 可以表示为

$$\{x \mid P(x)\} \text{或} \{x : P(x)\}$$

例如,小于 1 的正数的集合可以表示为

$$\{x \mid 0<x<1\}$$

方程 $x^2-2x-1=0$ 的解集可以表示为

$$\{x \mid x^2-2x-1=0\}$$

在平面直角坐标系中,到原点的距离等于 1 的点的集合可以表示为

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$$

上述集合的概念是有缺陷的,如不加以限制,就会产生悖论.为此,有所谓公理集合论.关于这个问题读者可参考胡作玄著《第三次数学危机》.

二、子集

定义 1 设 A,B 是两个集合,如果对于任意的 $a\in A$,总有 $a\in B$,则称集合 A 为集合 B 的子集,记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.此时,B 叫做 A 的扩集.

当 A 不是 B 的子集时,记作

$$A\nsubseteq B \text{ 或 } B\nsupseteq A$$

推论　任何一个集合是它本身的子集,即

$$A\subseteq A$$

定义 2 不包含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.

例如,$\{x \mid x+1=x+3\}=\varnothing$

$\{$大于零的负实数$\}=\varnothing$

规定:空集是任何集合的子集,即

$$\varnothing\subseteq A$$

其中 A 为任意集合.

定义 3 设 A 是 B 的子集,如果存在元素 $b\in B$ 但 $b\notin A$,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,B 叫做 A 的真扩集,记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

当 A 不是 B 的真子集时,记作

$$A\not\subset B \text{ 或 } B\not\supset A$$

显然,空集是任何非空集合的真子集.

定义 4　设 A,B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作

$$A=B$$

如果直接用“属于”叙述两个集合 A,B 相等的定义，则为：

如果对于任意的 $a\in A$，都有 $a\in B$，并且对于任意的 $b\in B$，都有 $b\in A$，则称集合 A 与 B 相等.

对于集合的包含和相等关系，容易证明传递性成立：

(1)如果 $A\subseteq B,B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

(2)如果 $A\subset B,B\subset C$，那么 $A\subset C$.

(3)如果 $A=B,B=C$，那么 $A=C$.

在所研究的问题中，如果所有集合都是某一特定集合的子集，就把这一特定集合叫做全集，常用符号 I 记之. 例如，当我们在实数集 $\mathbf{R}$ 的范围内研究问题时，所有有关的数集都是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，此时就把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集，即 $I=\mathbf{R}$.

第二节　集合的运算与运算律

一、集合的运算

定义 1　设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A,B 的交集，记作 $A\cap B$，读作 A 交 B，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\in B\}$$

定义 2　设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，叫做 A,B 的并集(也称和集)，记作 $A\cup B$，可读作 A 并 B，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或 } x\in B\}$$

特别地，如果 $A\cap B=\varnothing$，则称 $A\cup B$ 为 A,B 的直和，记作 $A+B$.

定义 3　设 A,B 是两个集合，由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合，叫做 A、B 的差集，记作 $A\backslash B$(或 $A-B$)，即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A,\text{但 } x\overline{\in} B\}$$

定义 4　设 A 是一个集合，称 $I\backslash A$ 为 A 的补集(或余集)，记作 $\overline{A}$. 也就是说，由所有属于全集而不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 的补集，即

$$\overline{A}\{x\mid x\in I,\text{但 } x\overline{\in} A\}$$

二、集合的运算律

集合的交、并、差、补满足下面的运算律：

1. 等幂律

$$A\cap A=A\qquad A\cup A=A$$

2. 同一律

$$A\cap I=A\qquad A\cup I=I$$

$$A\cap\varnothing=\varnothing\qquad A\cup\varnothing=A$$

3. 互补律

$$A\cap\overline{A}=\varnothing\qquad A\cup\overline{A}=I$$

$A=A$　　　$\bar{I}=\varnothing$　　$\overline{\varnothing}=I$

4. 交换律

$A\cap B=B\cap A$　　　$A\cup B=B\cup A$

5. 结合律

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$　　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

6. 分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

7. 吸收律

$A\cap(A\cup B)=A$　　$A\cup(A\cap B)=A$

8. 反演律(摩根律)

$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$　　$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

对于补运算,反演律为

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$　　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

从差的反演律可以得到对偶原理:在一个关于集合的等式中,把集合换成补集,把空集换成全集,把全集换成空集,把交运算改成并运算,把并运算改成交运算,等式仍然成立.

上面的运算律可以用交、并、差、补的定义进行证明,也可以按照上面列出的顺序用前面的运算律证明后面的运算律.下面以证明吸收律和反演律为例,说明证明运算律的方法.

【例 1】 证明吸收律:

(1)$A\cap(A\cup B)=A$;

(2)$A\cup(A\cap B)=A$.

证明 按照用前面的运算律证明后面的运算律的方法进行证明.

(1)$A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$　　(同一律)

$=A\cup(\varnothing\cap B)$　　(分配律)

$=A\cup\varnothing$　　(同一律)

$=A$　　(同一律)

(2)$A\cup(A\cap B)=(A\cap I)\cup(A\cap B)$　　(同一律)

$=A\cap(I\cup B)$　　(分配律)

$=A\cap I$　　(同一律)

$=A$　　(同一律)

【例 2】 证明反演律:

(1)$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$;

(2)$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

证明 按照定义进行证明.

(1)$x\in A\backslash(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A$ 但 $x\overline{\in}B\cap C$　　(差的定义)

$\Leftrightarrow x\in A$ 但 $x\overline{\in}B$ 或 $x\overline{\in}C$　　(交的定义)

$\Leftrightarrow x\in A\backslash B$ 或 $x\in A\backslash C$　　(差的定义)

$\Leftrightarrow x\in(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$, （并的定义）

$\therefore A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

(2)$x\in A\backslash(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A$ 但 $x\overline{\in}B\cup C$ （差的定义）

$\Leftrightarrow x\in A$ 但 $x\overline{\in}B$ 且 $x\overline{\in}C$ （并的定义）

$\Leftrightarrow x\in A\backslash B$ 且 $x\in A\backslash C$ （差的定义）

$\Leftrightarrow x\in(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ （交的定义）

$\therefore A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

第三节　集合的积与幂

一、集合的积

为了定义集合的积，首先给出有序对的概念.

在初等数学中，最常见到的有序对是平面直角坐标系中点的坐标(a,b).由此可以看出，有序对最根本的性质是：(a,b)和(c,d)当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时才被认为是相同的.一般地说，(a,b)和(b,a)是不同的.根据这一特征，1921 年波兰数学家库拉托夫斯基给出了有序对的集合论定义.

定义 1　称集合$\{\{a\},\{a,b\}\}$为有序对，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

不难验证，这样定义出来的(a,b)确实具有上面的特性.从上述定义可以看出，有序对(a,b)与集合$\{a,b\}$不相同.对集合来说，$\{a,b\}=\{b,a\}$；但是对于有序对来说，一般地却有$(a,b)\neq(b,a)$.

有了有序对的概念，我们便可以定义集合的积.

定义 2　设 A,B 是两个集合.当 $a\in A,b\in B$ 时，有序对(a,b)的全体组成的集合叫做 A 和 B 的笛卡尔积集，简称笛卡尔积或直积集或积集，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

例如，设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，那么 $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$；而 $B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$.由此可以看出，虽然 $A\times B$ 与 $B\times A$ 所含元素的个数相同，但它们却不相等.

一般地，设 A,B 分别有 m,n 个元素，那么 $A\times B$ 与 $B\times A$ 都含有 $m\times n$ 个元素.但是，正如上面的例所表明的那样，$A\times B\neq B\times A$，因为 $A\times B$ 与 $B\times A$ 的元素一般地并不相同.因此，对于笛卡尔积来说，交换律不成立.

对于两个集合的笛卡尔积，不难证明下面的性质成立：

性质 1　$A\times B=\varnothing$的充要条件是 $A=\varnothing$或 $B=\varnothing$.

性质 2　$A\times B\subset C\times D$ 的充要条件是 $A\subset C$ 且 $B\subset D$.

性质 3　$(A\times B)\cup(A'\times B)=(A\cup A')\times B$.

性质 4　$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

在 $A\times B$ 中，当 $A=B$ 时，积集就成为 $A\times A$.

由于直角坐标系的平面是

$$\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$$

用笛卡尔积集的记法，这个平面就可以记作 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，即

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$$

因此，复数集 $\mathbf{C}$ 与实数集 $\mathbf{R}$ 之间有如下关系

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{C}$$

把积推广到两个以上因子并无困难. 仿照有序对的定义，可以定义有序 n 元 $(a,b,c,\cdots d)$ 为 $((\cdots((a,b),c),\cdots),d)$，即

$$(a,b,c,\cdots d)=((\cdots((a,b),c),\cdots),d)$$

且当且仅当 $a=a',b=b',c=c'\cdots d=d'$ 时，有 $(a,b,c,\cdots,d)=(a',b',c'\cdots,d')$.

定义 3　设 $A,B,C\cdots,D$ 是 n 个集合，称集合

$$\{(a,b,c\cdots,d)\mid a\in A,b\in B,c\in C,\cdots,d\in D\}$$

为 $A,B,C,\cdots,D$ 的直积集，记作

$$A\times B\times C\times\cdots\times D$$

二、集合的幂

定义 4　设 X 是一个集合，由 X 的所有子集作为元素所组成的集合叫做 X 的幂集合，记作 $P(X)$，即

$$P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$$

例如，当 $X=\{a,b,c\}$ 时，$P(X)$ 共有 8 个元素：$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

又如，当 X 为空集时，虽然 X 不含有任何元素，但是其幂集合 $P(X)$ 却有一个元素 $\varnothing$.

一般地说，含有 n 个元素的集合 X，其元素个数为 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 的子集共有 C_n^k 个. 因此，X 的幂集合 $P(X)$ 的元素个数是

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$$

由此得出下面的定理：

定理 1　设集合 X 含有 n 个元素，那么 $P(X)$ 含有 2^n 个元素.

从幂集合的定义可以看出，集合 X 的幂集合 $P(X)$ 的元素是集合，以集合为元素的集合常称为集族.

第四节　映　射

定义 1　设 A,B 为非空集合. 如果有一个法则 f，使得对于 A 中的任一元素 a，都有 B 中的唯一元素 b 与之对应，则称 f 是一个 A 到 B 的映射，并记作

$$f:A\to B$$

A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 也叫 A 到 B 的函数. 当 a 对应到 b 时，称 b 是 a 的象（或函数值），记作 $f:a\mapsto b$ 或 $b=f(a)$；此时称 a 是 b 的原象，所有象的集合记作 $f(A)$：

$$f(A)=\{b\mid b=f(a),a\in A\}$$

显然，$f(A)\subseteq B$.

定义 2　设集合 A 到 B 的映射 $f:A\to B$. 如果 $f(A)=B$，则称 $f:A\to B$ 是 A 到 B 上的映射，简称 $f:A\to B$ 为映上的，或满射. 如果 $f(A)\subset B$，则称 $f:A\to B$ 是 A 到 B 内的映射，简称 $f:A\to B$ 为映入的，或不满的.

按照定义 1，对于一个映射 $f:A\to B$，A 中的任何元素在 B 中都有象，但 B 中的元素在 A 中不一定有原象. 当 B 中的任意元素在 A 中都有原象时，称 f 为映上的；当 B 中的某些元素在 A 中没有原象时，称 f 为映入的. 这就是定义 2 所给出的概念.

设映射 $f:A\to B$. 由定义 1，我们知道对于 A 中的任一元素 a，在 B 中总有唯一的象 b，但是对于象 b 就不一定只有一个原象. 为此，我们有下面的概念：

定义 3　设映射 $f:A\to B$. 如果对于任意的 $a,a'\in A$，当 $a\neq a'$ 时总有 $f(a)\neq f(a')$，则称 f 为 1－1 的映射，或称单射. 否则，称 f 为非 1－1 的映射.

对于既是 1－1 的又是映上的映射，我们称之为一一对应. 一一对应这类映射特别重要，我们重复地给出下述定义：

定义 4　如果映射 $f:A\to B$ 是

(1)1－1 的：对于 $a,a'\in A$，若 $a\neq a'$，则有 $f(a)\neq f(a')$，

(2)映上的：$f(A)=B$，

则称映射是 A 到 B 的一一对应(或双射).

对于集合 A 到本身的映射 $f:A\to A$，也称之为 A 到自身的变换.

对于集合 A 中任意元素使自身与它对应的映射，即

$$I:A\to A, a\mapsto a, a\in A$$

叫做 A 的恒等映射或单位映射. 习惯上，常把集合 A 的恒等映射(单位映射)记作 I_A.

【例 1】　设 A 是全体整数的集合，B 是全体偶数的集合，定义

$$n\mapsto 2n,\qquad n\in A$$

这是 A 到 B 的一个映射. 显然，这个映射是 A 到 B 的 1－1 映上的映射，即是 A 到 B 的一一对应.

由于例 1 中的 B 是 A 的真子集，由此可知一个集合可以和它的某一真子集之间建立一一对应.

【例 2】　设实数集 $\mathbf{R}$，正实数和 0 所组成的集合为 R^+，映射 f,g,h 分别为

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}，定义为\ x\mapsto x^2；$$

$$g:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}，定义为\ x\mapsto x^2；$$

$$h:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+，定义为\ x\mapsto x^2.$$

看起来，这三个映射似乎是相同的. 其实不然. 映射 f 是映入的，且不是 1－1 的；映射 g 是 1－1 的，但不是映上的；映射 h 既是 1－1 的，也是映上的，即 h 是一一对应.

对于映射，我们可以定义乘法. 设 f,g 分别是集合 A 到 B，B 到 C 的映射，乘积 gf 定义为

$$(gf)(a)=g(f(a))\qquad a\in A$$

即相继施行 f 和 g 的结果，gf 是 A 到 C 的一个映射.

对于集合 A 到 B 的任意一个映射 f，显然都有

$$I_B f = f I_A = f$$

映射的乘法适合结合律，设 f,g,h 分别是集合 A 到 B，B 到 C，C 到 D 的映射，则 $(hg)f = h(gf)$，此等式两边显然都是 A 到 D 的映射，要证明等式成立，只需证明

$$(hg)f(a) = h(gf)(a) \qquad a \in A$$

由定义可得

$$(hg)f(a) = (hg)(f(a)) = h(g(f(a)))$$
$$h(gf)(a) = h((gf)(a)) = h(g(f(a)))$$

由此结合律成立.

对于集合 A 到 B 的一一对应 f，我们可以定义它的逆映射，记为 f^{-1}. 因为 f 是映上的，所以 B 中每个元素都有原像；又因为 f 是 $1-1$ 的，所以 B 中每个元素的原像是唯一的，定义

$$f^{-1}(b) = a \qquad \text{当 } f(a) = b \text{ 时}$$

显然，f^{-1}是 B 到 A 的一一对应，并且

$$f^{-1}f = I_A \qquad ff^{-1} = I_B$$

不难证明，如果 f,g 分别是 A 到 B，B 到 C 的一一对应，那么乘积 gf 也是 A 到 C 的一一对应.

第五节　有限集和无限集

一、集合的对等

定义 1　设有两个集合 A,B. 如果存在一个从 A 到 B 的一一对应 $f: A \to B$，则称集合 A 与集合 B 对等，记作 $A \sim B$.

【例 1】下列各集合互相对等：

自然数集：$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

正偶数集：$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$；

正奇数集：$\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$；

自然数的平方数集：$\{1,4,9,\cdots,n^2,\cdots\}$；

10 的正整数次幂集：$\{10,10^2,10^3,\cdots,10^n,\cdots\}$.

事实上，只要把上下各行元素依次对应起来，就可以得到两个集合之间的一个一一对应. 正偶数集、正奇数集、自然数的平方数集、10 的正整数次幂集都是自然数集的真子集，但它们都可以和自然数集对等.

集合的对等具有下面的重要性质.

定理 1　设 A,B,C 为三个集合，那么

(1)自反性：$A \sim A$；

(2)对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

(3)传递性：若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$.

证明　(1)单位变换 I_A 就是 A 到 A 的一一对应，故 $A \sim A$.

(2)因为 $A \sim B$，所以存在从 A 到 B 的一一对应 $f: A \to B$. 而这个一一对应有逆映射

$f^{-1}:B\to A$，并且 f^{-1} 是从 B 到 A 的一一对应，所以 $B\sim A$.

(3)因为 $A\sim B$，$B\sim C$，所以存在 $f:A\to B$，$g:B\to C$，这里 f,g 都是一一对应，由本章第四节可知 f 与 g 的乘积 gf 是 A 到 C 的一一对应，所以 $A\sim C$. 证毕.

二、有限集与无限集

假设我们已经建立了自然数理论，下面用集合对等的概念定义有限集和无限集.

定义 2 如果对于集合 A，存在自然数 n，使 A 和集合 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 对等，则称集合 A 为有限集. 如果对于集合 A 这样的 M_n 不存在，则称集合 A 为无限集. 空集也是有限集.

习惯上把集合 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 叫做自然数列的一个截段. 定义 2 即是说凡是可以和自然数列的某一截段对等的集合称为有限集，否则称为无限集.

由定义 2 可以看出，一个集合称为有限集，假设它的元素可以用 $1\sim n$ 的自然数进行编号，不同的元素有不同的编号，并且 $1\sim n$ 的每个自然数都用到. 因此，一个有限集可以记作 A_n，元素可以用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 来代表

$$A_n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

甚至完全可以把有限集 A_n 的元素用 $1,2,\cdots,n$ 来代表

$$A_n=\{1,2,\cdots,n\}$$

定理 2 有限集不能与它的真子集对等.

证明 设有限集 $A_n=\{1,2,\cdots,n\}$，n 为自然数；B 是 A_n 的真子集：$B\subset A_n$.

对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$A_1=\{1\}$. 这是一个单元素集，它的真子集就是空集 $\varnothing$. 显然，A_1 不能与 $\varnothing$ 对等.

假设 $n=k$ 时定理成立，即对于任意的 $B\subset A_k$，A_k 不与 B 对等.

对于 $n=k+1$ 时，我们用反证法证明 A_{k+1} 不能与它的任何真子集对等.

假设存在集合 B'，有

$$B'\subset A_{k+1}，且\ A_{k+1}\sim B'$$

那么根据对等的定义，存在一个从 A_{k+1} 到 B' 的一一对应 $f:A_{k+1}\to B'$.

于是，在 f 的作用下，A_{k+1} 中的元素 $k+1$ 必对应于 B' 中的某一个元素 u. 首先，我们断定 u 不会是 $k+1$. 否则，从 A_{k+1} 与 B' 中分别去掉 $k+1$ 而得集合 A_k 与 B''，且 $B''\subset A_k$，又 $f:A_k\to B''$ 仍是一一对应，所以 $A_k\sim B''$，这与归纳假设矛盾. 其次，我们断定必有 $k+1\in B'$. 否则，若 $k+1\notin B'$，由 $B'\subset A_{k+1}$ 可得 $B'\subseteq A_k$. 这时从 B' 中去掉 u 而得 B''，则有 $B''\subset A_k$，且 $f:A_k\to B''$ 仍是一一对应，又得 $A_k\sim B''$，与归纳假设矛盾.

这样，B' 中的元素 $k+1$ 在 f 的作用下必对应于 A_{k+1} 中的某一元素 v.

现在利用 $f:A_{k+1}\to B'$ 作一个新的映射 $g:A_{k+1}\to B'$ 如下：A_{k+1} 中的元素 $k+1$ 对应于 B' 中的元素 $k+1$，A_{k+1} 中的元素 v 对应于 B' 中的元素 u，其余诸元素间的对应仍按 f 作用下的对应不变.

很明显，映射 g 只不过是把 f 作用下 $k+1$ 与 v 的象互换，而其余元素的象不变. 显然，g 是一个从 A_{k+1} 到 B' 的一一对应.

这时把 A_{k+1} 与 B' 分别去掉 $k+1$，得 A_k 与 B''，则 $B''\subset A_k$，且 $g:A_k\to B''$ 仍是一一对应，