

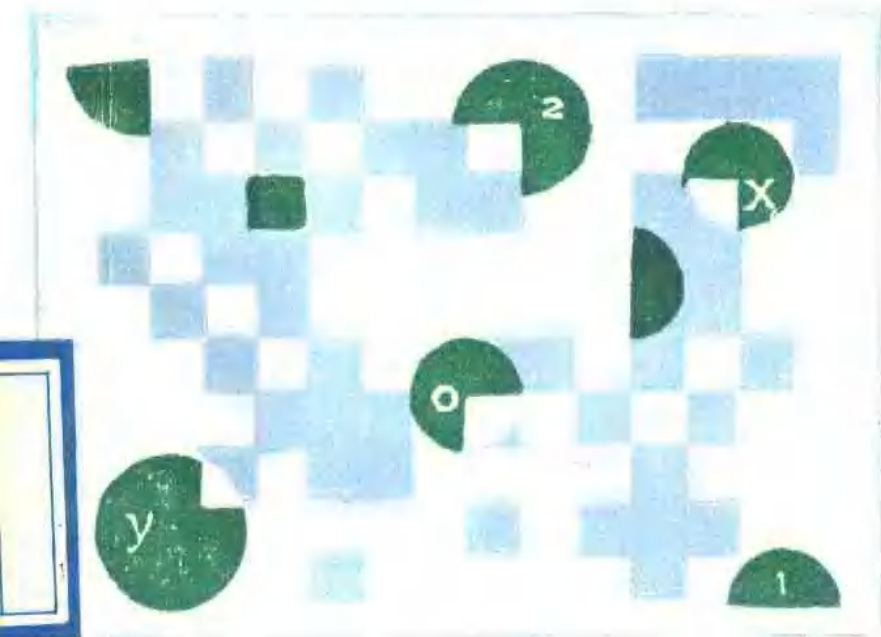
BANGNIXUE SHUXUE

帮你学数学

代数

第二册 初中一年级

厉善铎 主编



能源出版社

帮你学数学

代数第二册
(初中一年级)

北京市海淀区	特级教师	厉善铎	主编
教师进修学校			
马效江	赵永丰		合编
徐流	平力		

能源出版社

帮你学数学（初中一年级）

（代数第二册）

厉善铎 主编

能源出版社出版 新华书店总店科技发行所发行

北京太北印刷厂印刷

787×1092 1/32 开本 8.375 印张 187 千字

1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

印数：1—15,000册

ISBN 7-80013-100-6/0.14 定价：3.35元

编写意图

家长都希望自己的孩子努力学习，全面发展，取得优异成绩，但当孩子提出疑难问题或辅导孩子时，家长却常常感到困难很大，无从下手。这套初中语文、数学“帮你学”丛书，首先就是针对这些情况编写的，同时，也提供教师一些资料，教法，提供学生多种形式的知识和能力练习。希望这套丛书能够成为家长辅导孩子的“好助手”、教师备课讲课的“好参谋”、学生学习的“好老师”。

数学部分是按照课本顺序以每节为一单元进行编写的，它主要包括“帮你预习”、“帮你学习”、“帮你复习”、“资料·趣味·提高”。

一、“帮你预习”安排复习、阅读、回答与填空。按照上述要求完成后，学生能够初步掌握或了解本节课的知识。

二、“帮你学习”针对本节的主要概念，特别是重点难点进行较详细的分析；之后指出应用这些概念的注意事项；对于例题，我们侧重于“分析”与“审题”，注重能力的培养。同时也补充了一些例题，尽可能地给出一题多解，由此增大覆盖面、加强教材的深度和广度。同时也是为了启发学生积极思维。对于教材的内容有的地方作了一些提示、建议；主要是为教师备课、家长指导学生学习用的。而学生读了也能达到深刻理解概念的目的。

三、“帮你复习”以提问的形式复习概念，以习题形式复习概念的应用。除了要求同学们完成课本练习题外，还配备了一定数量的练习题，供不同水平的学生选用。

四、“资料·趣味·提高”根据基础与提高相结合、能力与兴趣相结合、课内与课外相结合的意图、介绍了数学史料、趣味数学、以及课本涉及到的有一定难度的习题的思维方法。想通过这部分内容对学有余力的学生，在知识的深度、广度上给以引导。在解题技巧上，思考方法上开阔思路。

五、每册书后，都有练习及自测题的答案由于纸张原因不重复原题只给出结果或做简单的解题提示。

六、这套丛书，数学部分由马效江、徐流、平力、赵永丰、四位同志合编。由于水平不高。错误不足之处诚恳希望读者批评指正。

厉善铎

1989年2月

目 录

第五章	二元一次方程组	(1)
一	二元一次方程	(1)
二	二元一次方程组	(9)
三	用代入法解二元一次方程组	(18)
四	用加减法解二元一次方程组	(26)
五	三元一次方程组的解法举例	(35)
六	一次方程组的应用(一)	(42)
七	一次方程组的应用(二)行程问题	(47)
八	一次方程组的应用(三)工程问题及浓度问题	(50)
九	自测题	(55)
第六章	整式的乘除	(59)
一	整式的乘法	(59)
二	乘法公式	(85)
三	整式的除法	(101)
四	自测题	(116)
第七章	因式分解	(118)
第八章	分式	(166)

第五章 二元一次方程组

方程是大量的物理问题和其他实际问题的数学表述，许多重要课题的解决，都归结为解方程，同学们学习了一元一次方程以后发现用它解决一些实际问题比算术解法方便，那么学习二元一次方程组以后，解决实际问题将会更方便了。

一 二元一次方程

学习内容：第1—2页 第2页练习

帮你预习

1. 回忆什么叫“元数”？什么叫“次数”？

$5 - x = 4$ （其中 x 是未知数）这个等式叫什么？

2. 说一说 $x = 2$ 的含义？

3. 复习一元一次方程的解题步骤。

4. 阅读课本填空

①已知两个数的和是7，求这两个数的数学表达式记为_____，我们把这个表达式叫做_____，这个方程解的特点是_____。

②二元一次方程所有的解的集合叫做_____。

③比较 $2x + 5 = 0$ 与方程 $x + y = 7$ 相同点是_____，不同点是_____。

帮你学习

1. 二元一次方程的定义：一个方程含有的两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，这样的方程叫做二元一次方程。

如 $x+y=7$, $3x=75-y$, $2y+3z=1$,
 $2x+3y-1=0$, ……都是二元一次方程。

2. 二元一次方程的相关性

①什么叫做二元一次方程的一个解。

如 $x+y=7$, 当 $x=3$, $y=4$ 时, 方程左右两边的值相等。则称 $x=3$ 、 $y=4$, 是一对适合(或满足) $x+y=7$ 的未知数的值, 叫做 $x+y=7$ 的一个解, 记为 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

同样, 当 $x=1$ $y=6$ 时, 也叫做 $x+y=7$ 的一个解, 记为 $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ 。

综上: 适合一个二元一次方程的每一对未知数的值, 叫做这个二元一次方程的一个解。

②怎样求二元一次方程的解?

方法一: 如 $x+y=7$, 用含有 x 的代数式表示 y , 得

$$y=7-x \quad (1)$$

当 $x=-1$ 时, 代入 (1) 得 $y=8$,

即方程的一个解:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$$

当 $x=5$ 时, 代入 (1) 得 $y=2$

即方程的一个解:

$$\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

……

方法二：如 $x+y=7$ ，用含有 y 的代数式表示 x 得

$$x = 7 - y \quad (2)$$

当 $y = -1$ 时 代入(2)得 $x = 8$

即方程的一个解

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \end{cases}$$

当 $y = 0$ 时，代入(2)得 $x = 7$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$$

.....

③解的相关性 二元一次方程中两个未知数是相关的是互相制约的。

如 $x+y=7$ ，当 $x=8$ 时，则 y 的值是 -1 ；当 $y=0$ 时，则 x 的值是 7 。但是未知数 x 与 y 的值不能随意地取，如取 $x=100$ ， $y=-100$ 时，不是方程 $x+y=7$ 的解。

3. 二元一次方程解的不定性

①二元一次方程的解的个数

如 $x+y=7$

先看下表

方程的解	x		-100.....	$-2\frac{1}{2}$	-2	-1	0	1	2	3.5.....	100.....
	y		107.....	$9\frac{1}{2}$	9	8	7	6	5	2.5.....	-93.....

可知二元一次方程的解只无数个，即二元一次方程的解是不定的。

②二元一次方程的解集：由二元一次方程的所有解组成的集合，叫做这个二元一次方程的解集。

如 $x+y=7$ 我们将它每一对解表示成 (x, y) 的形式, 即 $(-1, 8), (0, 7), (1, 6) \dots$ 则这个方程的解集可以表示为

$$\{(x, y) \mid (-1, 8), (0, 7), (1, 6) \dots\}$$

4. 学习例题

例1 判断① $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$ 是不是方程

$2x+y-1=0$ 的解。

分析: 同一元一次方程的判别法一样, 将解代入方程的两边, 若等式成立, 则是方程的解, 若等式不成立, 就不是方程的解。

解①将 $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ 代入方程

$$\text{左边} = 2 \times (-5) + 1 - 1 = -10$$

$$\text{右边} = 0$$

$\therefore \text{左边} \neq \text{右边}$

故 $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$ 不是方程 $2x+y-1=0$ 的解

②将 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$ 代入方程

$$\text{左边} = 2 \times 3 + (-5) - 1 = 6 - 5 - 1 = 0$$

$$\text{右边} = 0$$

$\therefore \text{左边} = \text{右边}$

故 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$ 是方程 $2x+y-1=0$ 的一个解。

例2 已知方程 $2x - 3y + 5 = 0$

①用含 x 的代数式表示 y ;

②用含 y 的代数式表示 x ;

③当 $x = -1$ 、 0 、 3 时求 y 的对应值;

④当 $y = -1$ 、 0 、 3 时求 x 的对应值;

⑤任意求出方程的两对正数解和两对负数解。

分析：用含 x 的代数式表示 y 的方法把 x 视作已知量，通过移项，合并同类项等手段，求 y 。用含 y 的代数式表示 x 的方法把 y 视作已知量，通过移项，合并同类项等手段求 x 。③④用代入法求值；⑤用列表的方法求方程的解集从中任取两对正数解和两对负数解。

解 ① $2x - 3y + 5 = 0$

移含 x 项及常数项到等号的右边，得

$$-3y = -2x - 5$$

两边同除以 -3 ，得

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}$$

②移含 y 项及常数项到等号的右边，得

$$2x = 3y - 5$$

两边同除以 2 ，得

$$x = \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}$$

$$\text{③当 } x = -1 \text{ 时 } y = \frac{2}{3} \times (-1) + \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = 1$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时 } y = \frac{2}{3} \times 0 + \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\text{当 } x = 3 \text{ 时 } y = \frac{2}{3} \times 3 + \frac{5}{3} = 3\frac{2}{3}$$

$$\textcircled{4} \text{ 当 } y = -1 \text{ 时 } x = \frac{3}{2} \times (-1) - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时 } x = \frac{3}{2} \times 0 - \frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

$$\text{当 } y = 3 \text{ 时 } x = \frac{3}{2} \times 3 - \frac{5}{2} = 2$$

⑤列表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$	...	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	

故任取两对正数解为

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

两对负数解为

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

帮你复习

1. 二元一次方程的解有多少个? 怎样确定它的一个解? 什么叫解的不定性?

2. 判断下列各方程哪个是二元一次方程, 哪个不是二元一次方程? 为什么?

① $2x + 3y = 5$

② $x + 1 = y^2$

③ $\frac{1}{x} + 4y - 2 = 0$

④ $x + y = 0$

⑤ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

⑥ $2x + 3y = 4z$

⑦ $x = y$

⑧ $xy + 3x - 2 = 0$

3. 试比较一元一次方程与二元一次方程的异同点。你说说用下面的表格比较是否清楚？

	定 义 上 比 较	解 的 形 式 上 比 较
相同点	①都是整式方程 ②未知数的项都是一次的	①一元一次方程的解是一个数 ②一元一次方程的解是一对数
不同点	①一元一次方程只含一个未知数 ②二元一次方程含有两个未知数	①一元一次方程只有一个解 ②二元一次方程有无穷多个解

4. 已知二元一次方程 $\frac{1}{2}x + 3y - 4 = 0$

①用含 x 的代数式表示 y

②用含 y 的代数式表示 x

练习A

一、判断① $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x=8 \\ y=-4 \end{cases}$ 是不是方程

$x+y-4=0$ 的解？

二、在下列方程中，用含 x 的代数式表示 y

① $8x + 3y = 1$ ② $2y - x = 0$

③ $2x + 3y - 1 = 0$ ④ $6x - 9y - 11 = 0$

三、在方程 $4x - 3y + 6 = 0$ 中含 $x = -2, -1, 0, 1, 2$ 分别求出对应的 y 的值

(四) 已知方程 $2x - \frac{1}{3}y - 1$

①用含 x 的代数式表示 y

②当 $x = 1, -2$ 时求 y

③用含 y 的代数式表示 x

④当 $y = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ 时求 x

五、求出方程 $x + 2y = 15$ 在正整数范围内的解

六、在方程 $mx + 3y = 10$ 中, $x = 2, y = 1$ 是它的一对解, 求 m 的值

资料·趣味·提高

二元一次方程通过变形都可以化成 $Ax \pm By = C$ 的形式。当 A, B 是正整数, C 是整数时, 我们称这样的二元一次方程为二元一次不定方程。

下面我们给出求不定方程的正整数解的方法。

例: 求不定方程 $5x + 3y = 22$ 的正整数解。

解: 先用 x, y 系数中较小的一个 3 去除方程式的各项并解出 y , 得

$$y = \frac{22 - 5x}{3} \quad ①$$

再把 x 项的系数 $-\frac{5}{3}$, 和常数项 $\frac{22}{3}$ 的整数部分和分数部分加以分离成为

$$y = 7 + \frac{1}{3} - x - \frac{2}{3}x \quad \text{即 } y = 7 - x + \frac{1 - 2x}{3}$$

由于 x, y 都是整数, $7 - x$ 也是整数, 故 $\frac{1 - 2x}{3}$ 也一定是整数。

设 $\frac{1 - 2x}{3} = k_1$, 则 $3k_1 + 2x = 1$ 即得又一不定方程 (k_1 为整数), 仍按前法用 x, k_1 系数中较小的一个 2 去除方程式的各项, 解出 x 。得

$$x = \frac{1 - 1k_1}{2} \quad ②$$

分离 k_1 系数 $-\frac{3}{2}$ 的整数部分和分数部分:

$$x = -k_1 + \frac{1 - k_1}{2}$$

同上 $\frac{1-k_1}{2}$ 为整数

设 $\frac{1-k_1}{2} = k_2$ (k_2 为整数) 得

$$1 - k_1 = 2k_2 \quad (3)$$

其中 k_1 的系数为 1, 较 k_2 的系数为 1。到此就不必再按前法除下去了。

从③式解出 $k_1 = 1 - 2k_2$ 代入①式和②式, 得

$$\begin{cases} x = 3k_2 - 1 \\ y = 9 - 5k_2 \end{cases} \quad (k_2 \text{ 为整数}) \quad (4)$$

这就是原不定方程整数解的通式。至于正整数解, 我们这样来思考: 由于 $x > 0$, $y > 0$ 也就是

$$\begin{cases} 3k_2 - 1 > 0 \\ 9 - 5k_2 > 0 \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{1}{3} < k_2 < 1\frac{4}{5}$$

而 k_2 为整数, 因此只能取 $k_2 = 1$, 代入通式 (4) 即得原不定方程的唯一正整数解, 为

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

练习求 $24x + 15y = 20$ 的整数解。

二 二元一次方程组

学习内容: 第 3—5 页, 第 5 页练习
帮你预习

1. 任意举出四个二元一次方程, 并逐一说明每个方程的解的个数, 然后求出每个方程的一对解来。

2. 用 (x, y) 的形式表示方程的一对解, 现有 $(2, 1)$ 、

$(3\frac{1}{2}, 0)$ 、 $(0, -1)$ 请回答：

①哪个是方程 $2x + 3y = 7$ 的解？

②哪个是方程 $x - y = 1$ 的解？

③哪个是两个方程的公共解？

3、阅读课文并思考下列问题。

①什么叫方程组？什么叫二元一次方程组？

②什么叫做方程组的解？

帮你学习

1、如何理解二元一次方程组的定义？

(1)二元一次方程组的定义：由几个一次方程组成并含有两个未知数的方程组，叫做二元一次方程组。

(2)二元一次方程组的定义包含三个条件

①由几个（至少两个）方程组成；

②每个方程都是一次的；

③方程组内的未知数总共两个（每个方程所含未知数可能是两个，也可能是一个）。

如 $x + y - 1 = 0$

$2x - y = 10$

$\begin{cases} x = 3 \end{cases}$

$2x + 3y - 1 = 0$

$\begin{cases} x + y = 7 \end{cases}$

$x - y + z = 0$

$3x + 2y - 1 = 0$

$\begin{cases} x + 4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = z \end{cases}$

都是二元一次方程组。

其中“ $\{$ ”叫做联立符号，通过它把几个二元一次方程组。

显然 $\begin{cases} 2x - z = 3y \\ 3x^2 - 2y = 1 \end{cases}$

不是二元一次方程组。

(3) 我们将要讨论的二元一次方程组都是指由两个 一次方程组成的二元一次方程组。

2、二元一次方程组的解是指方程组两个二元一次方程的公共解

请看下面事实

$$\begin{cases} 5x + 14y = 24 & \text{①} \\ 16x - 21y = 17 & \text{②} \end{cases} \text{ 是一个二元一次方程组}$$

①的一些解用下表表示

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$y = \frac{24-5x}{14}$	$\frac{39}{14}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{29}{14}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{19}{14}$	1	$\frac{9}{14}$	

②的一些解用下表表示

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
$y = \frac{17-16x}{21}$	$-\frac{74}{21}$	$-\frac{55}{21}$	$-\frac{36}{21}$	$-\frac{17}{21}$	$\frac{2}{21}$	1	$\frac{40}{21}$	

①与②的公共解 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 就是此方程组的解。

3、不能说任何一个二元一次方程组都有解，我们将逐步发现二元一次方程组的解有三种情况①有唯一一对解；②有无穷多对解；③无解。

4、学习例题

例1 判断 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 是不是方程组

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 & \text{①} \\ 2x + 5y - 7 = 0 & \text{②} \end{cases} \text{ 的解。}$$

分析：由方程组的解的定义知道如果 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ 是二元一