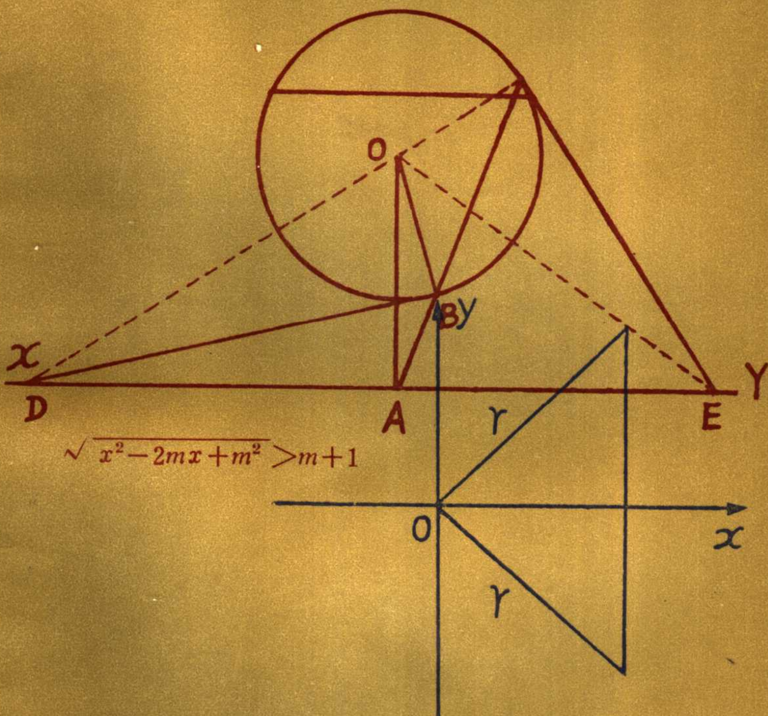
高中数学教材补充题

第一册



浙江人民出版社

高中数学教材补充题

（第一册）

许纪传　钱孝华　江焕棣
陶敏之　谢玉兰　丁宗武

浙　江　人　民　出　版　社

高中数学教材补充题
（第一册）
*
浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥堍）
浙江省新华书店发行
开本 787×1092 1/32 印张 4.625 字数104,000
1981年5月第 1 版
1981年5月第1次印刷
印数：1—57,000
统一书号：7103·1168
定　价：0.33 元

说　　明

近年来适应读者需要，各类习题集纷纷出版，但要在如此纷繁的题目中精选出适合学生练习的题目，却也得耗费教师学生许多精力和时间。为此，我们从多年积累的大量资料中精选出与现行高中数学教材有密切联系的习题若干，按内容分类编辑，供教师学生选择使用。编选过程中把重点放在加强基础知识和基本技能的训练上，注意习题类型的多样化和内容的新颖，重视综合运用。并本着少而精的原则，选择从严，避免增加学生作业负担，力求对课堂教学和提高学生分析解决问题的能力有所帮助。

全书按教材内容顺序分段编排，其中A组属于基本题，B组略有提高和带有一定的综合性，C组难度较大，系供学有余力的学生练习。教师学生可以根据实际情况灵活运用，不要强求一律。

本书在编选中得到童友谿、贺元泰两位老师的热忱帮助，提出许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢。

一九八一年二月

目　录

第一章　幂函数 指数函数 对数函数

一、集合与对应

1．用列举法表示下列各集合：

(1) 与1相差4的有理数集合； {-3、5}

(2) 一元二次方程 $x^2-6x+1=0$ 的所有解的集合；

(3) 42的所有约数的集合；

(4) $\left\{x: x=\frac{m}{n},\ m\in J,\ |m|<2,\ n\in J,\ n\leqslant 3\right\}$；

(5) $\{(x, y): x\in N,\ y\in N,\ x+y=6\}$.

2．用描述法的另一形式表示下列集合：

(1) $\{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$；

(2) $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$；

(3) {奇数}；

(4) {10的整数次幂}；

(5) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \cdots\cdots\right\}$；

(6) $\{1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots\cdots\}$；

(7) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \cdots\cdots\right\}$.

3．下列集合哪些是有限集？无限集？单元素集？空集？

(1) 亿以内的正整数集合；

(2) 大于一万的整数集合；

(3) 5的倍数的集合；

(4) 20的约数的集合；

(5) 方程 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ 的根的集合；

(6) 函数 $y=-(x-5)^2$ 的正数值集合.

4. 若 $A=\{x:x=2n,\ n\in J\}$，$B=\{x:x=2n+1,\ n\in J\}$，用"$\in$"、"$\notin$"、"$\subset$"等符号填空：

(1) $\{2,8\}$____A；(2) 107____A；(3) A____J；

(4) ϕ____B；　(5) 0____N；　(6) $\{0\}$____A；

(7) $A\cap B$____$\{0\}$；(8) $A\cup B$____N；(9) 0____$\{0\}$.

5. 填空：

(1) $\{a,b,$ ____$\}\cap\{c,d,$ ____$\}=\{b,c\}$；

(2) $\{a,b,$ ____$\}\cup\{b,d,e\}=\{a,b,c,d,$ ____$\}$；

(3) $\{a,d$____, ____$\}\cap\{d,c,e,$____, ____$\}=\{a,b,e,$ ____$\}$.

6. 已知 $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$.

$C=\{1,3,5,7,9\}$，$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

求：

(1) $A\cap B$；　(2) $A\cap C$；　(3) $B\cap C$；

(4) $A\cup B$；　(5) $B\cup C$；　(6) $\overline{A}$；

(7) $\overline{A\cup C}$；　(8) $\overline{A}\cap\overline{C}$；　(9) $\overline{A}\cup\overline{C}$；

(10) $\overline{A\cap C}$；　(11) $\overline{\phi}$.

7. 若记 $A=\{$三角形$\}$，　$B=\{$等腰三角形$\}$，

$C=\{$等边三角形$\}$，　$D=\{$直角三角形$\}$.

则 A____D；　C____A；　$D\cap A=$____；

$C\cup B=$____；$C\cap D=$____；$A\cup D=$____；

$D\cap B=$____.

8. 填空：

如果 $I=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,e,f\}$，

那么

$\overline{A}=$______； $\overline{B}=$______； $A\cap\overline{A}=$______；

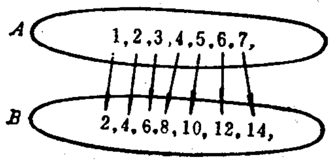
$\overline{A}\cup\overline{B}$______， $A\cap B$______， $\overline{A\cup B}=$______；

$A\cup B=$______， $\overline{A}\cap\overline{B}=$______， $A\cup\overline{A}=$______；

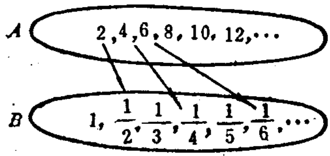
$\overline{A\cap B}=$______.

9. 试根据两集合 A、B 间的对应图，写出对应关系式 f，并说明 f 是否函数关系式：

(1) $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$B=\{2,4,6,8,10,12,14\}$；



(2) $A=\{x:x=2n,\ n\in N\}$，$B=\{x:x=\dfrac{1}{n},n\in N\}$.



10. (1) 若 $I=\left\{x:x=\dfrac{1}{2^n},\ n\in N\right\}$,

$A=\left\{x:x=\dfrac{1}{2^{2n}},\ n\in N\right\}$,

求 $\overline{A}$；

(2) 若 $A=\{x:x=2n,\ n\in N\}$,

$B=\{x:x=3n,\ n\in N\}$,

求 $A\cap B$；

(3) 若 $A=\{x:x<12,\ x\in N\}$，$B=\{x:x>6,\ x\in N\}$，

求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A\cup B}$.

11．作出下列各题的对应图，并指出哪些对应关系是单值对应？

(1) 已知 $A=\{0\}\cup N$，$B=N$，从 A 到 B 的对应关系是 f：

$x\longrightarrow|x-3|$；

(2) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{-4,-3,0,5,12\}$，

f：$x\longrightarrow x(x-4)$；

(3) $A=N$，$B=\{-1,1\}$，f：$x\longrightarrow(-1)^x$；

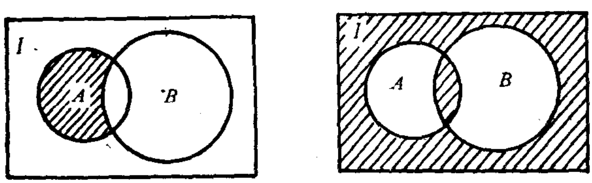
(4) $A=J$，$B=\{$有理数$\}$，f：$x\longrightarrow 2^x$.

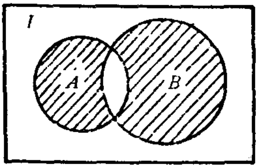
12．记 $A=\{(x,y):x\in J,\ |x|<2,\ y\in N,\ x+y<3\}$，$B=\{0,\ 1,\ 2\}$，从 A 到 B 的对应关系 f 是 $(x,\ y)\longrightarrow x+y$，试画出对应图，判断 f 是不是单值对应，为什么？

13．已知集合 $A=\{x:x>2,\ x\in N\}$ 到集合 N 的对应关系是 f：$x\longrightarrow$ 小于 x 的最大质数，试作出对应图，并说明对应 f 是不是函数？

14．设二次方程 $x^2-px+15=0$……(1) 的解集为 A，$x^2-5x+q=0$……(2) 的解集为 B，当 $A\cup B=\{2,\ 3,\ 5\}$、$A\cap B=\{3\}$时，求集合 A 和 B，再求 p 和 q 的值.

15．如果 I 表示全集，用交集、并集、补集的记号将下面阴影部分用集合 A、B 表示出来：





二、函数的基本性质与幂函数

（A）

16．分别用集合、不等式、区间三种表示法表示：

（1）不大于$\frac{2}{3}$的一切实数组成的集合；

（2）小于 4 但不小于－8 的一切实数所组成的集合；

（3）绝对值不大于 1 的一切实数所组成的集合．

17．已知 $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}$，试问 y 是 x 的函数吗？为什么？

18．下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示为同一函数，为什么？并指出 x 取哪些值时，它们是相同的：

（1）$f(x)=x$，$g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$；

（2）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=1$，$g(x)=\frac{x}{x}$；（4）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；

（5）$f(x)=1$，$g(x)=x^0$；

（6）$f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases} x & x\in[0,+\infty) \\ -x & x\in(-\infty,0) \end{cases}$．

19．（1）已知 $f(x)=2x^2, x\in R$，求 $f(0)$，$f(-2)$，并指出函

数的值域；

(2) $f(x)=kx+b$，若 $f(1)=1$，$f(2)=3$，求 $f(5)$；

(3) $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$，求 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$；

(4) $f(x)=2x-\sqrt{x^2+4x+4}$，求 $f(2)$，$f(-3)$，$f(a)$；

(5) $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(2x)$，$f[f(x)]$.

20. (1) 若 $f(x)=a^x$，求证 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$；

(2) 若 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，　$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，

求证：$[g(-x)]^2-[f(-x)]^2=1$；

(3) 若 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，求证：$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=-f(t)$；

(4) 若 $f(x)=3x^2$，求证：$f(a+b)+f(a-b)=2f(a)+2f(b)$.

21. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+6}}$；　(2) $y=\dfrac{x}{x^2-x+4}$；

(3) $y=\sqrt{4x-x^2-4}$；(4) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{|x|-1}$；

(5) $y=\dfrac{x^2+2}{x+|x|}$；　(6) $y=\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}$.

22. (1) 将长为 a 的铅丝折成矩形，写出面积 y 与长 x 的函数关系式，并求出此函数的定义域和值域；

(2) 已知 $(3x+2)(y-1)=4$，把它写成 $y=f(x)$ 的形式，并指出 x 的允许值的范围.

23. 作出下列函数的图象：

(1) $y=(-1)^x$, $x\in\{0,1,2,3\}$;

(2) $y=x-|1-x|$, $x\in R$;

(3) $y=(x+1)(5-x)$, $-2\leqslant x\leqslant 3$;

(4) $y=x^0$.

24. (1) 若 $f(x)$ 是正比例函数，且 $f(-2)=3$，确定 $f(x)$；

(2) 若 $f(x)$ 是反比例函数，且 $f(-1)=6$，确定 $f(x)$；

(3) 若 $f(x)$ 是一次函数，$f(0)=5$，且图象过点 $(-2,1)$，确定 $f(x)$；

(4) 若 $f(x)$ 是二次函数，其图象过原点，且 $f(1)=1$，$f(-1)=5$，确定 $f(x)$.

25. 确定 a 的范围：

(1) $5^a>2^a$；　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{3}\right)^a$；　(3) $3^a>1$；

(4) $-0.4^a<-1.3^a$.

26. 在实数范围内，讨论下列函数的增减性：

(1) $y=3x-6$；　(2) $y=3-2x$；(3) $y=x^2+x+1$；

(4) $y=4x+5-x^2$；(5) $y=-\frac{3}{x}+1$.

27. 若 $f(x)$ 在它的定义域内是增函数，且 $f(x)>0$，讨论下列函数的增减性：

(1) $y=5+f(x)$；　(2) $y=-f(x)$；

(3) $y=\frac{1}{f(x)}$；　$y=[f(x)]^2$.

若 $f(x)<0$ 呢？

28. 求证：函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 所增加的量和对应的自变量所增加的量之比等于 k.

29. 求下列函数的逆对应和反函数：

(1) $y=\dfrac{x+1}{4x-5}$；　　(2) $y=-x^2+2x-4\quad(x\leqslant 1)$；

(3) $y=x^{\frac{3}{7}}-2$.

30. 一次函数 $y=kx+b\quad(k\neq 0)$ 一定有反函数吗？为什么？二次函数 $y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$ 有反函数吗？为什么？对自变量 x 作如何限制，它就有反函数？

31. 求证：函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ 的反函数就是它本身.

32. 在实数范围内，讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x+1}$ 的符号.

33. (1) 确定 a 的值，使 ax^2-2x+1 有极小值 -2；

(2) 求证：函数 $y=-2x^2-3x+4$ 的值不可能取 6 而能够取 5.

34. 已知 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$（x 为实数)；求满足条件 $f\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)=-\dfrac{x}{2}$ 的 x 值.

(B)

35. (1) 已知函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}},$$

求 $f(ab)$；

(2) 已知抛物线 $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a>0)$ 的对称轴为 $x-2=0$，试比较 $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与 $f(\pi)$ 的大小；

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0), \\ \pi & (x=0), \\ 0 & (x<0), \end{cases}$

求 $f(-2)$, $f\{f[f(-1)]\}$.

36. (1) 设 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, 求满足 $f[f(x)]=x$ 的 x;

(2) 已知 $f(x)=9x+1$, $g(x)=x^2$, 求满足 $f[g(x)]=g[f(x)]$ 的 x;

(3) 若 $f(x)=3x-1$, $g(x)=2x+3$, 求满足 $f[h(x)]=g(x)$ 的函数式 $h(x)$;

(4) 已知 $f_1(x)$ 是正比例函数, $f_2(x)$ 是反比例函数, 且 $\dfrac{f_1(1)}{f_2(1)}=2$, $f_1(2)+4f_2(2)=6$, 试确定 $f_1(x)$, $f_2(x)$.

37. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{|x-2|+|x+1|}$; (2) $y=\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$;

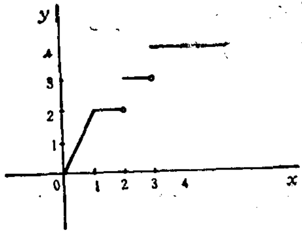
(3) $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$; (4) $y=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

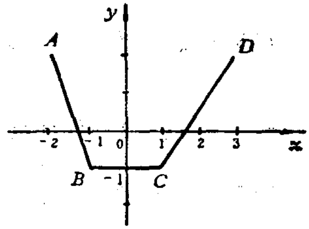
38. 当 k 为何值时, 函数 $y=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域是全体实数?

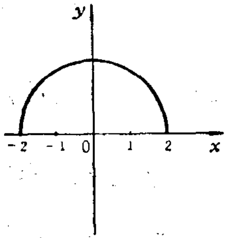
39. 作出下列函数的图象:

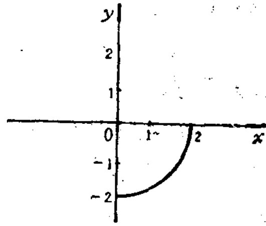
(1) $y=|x+5|+\sqrt{(x-1)^2}$; (2) $y=1+\dfrac{|x|}{x}$.

40. 根据下面图象, 分别写出它们的函数表达式:









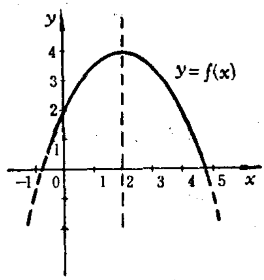
41．比较下面各组数的大小：

(1) $0.9^{\frac{3}{4}}$，$1.2^{\frac{3}{4}}$，1；　　(2) $2.5^{\frac{2}{3}}$，$(-1.4)^{\frac{2}{3}}$，$(-3)^{\frac{1}{3}}$；

(3) $2^{\frac{2}{3}}$，$3.6^{-\frac{3}{4}}$；　　(4) $4.1^{\frac{2}{5}}$，$3.8^{-\frac{2}{3}}$，$(-1.9)^{\frac{3}{5}}$.

注意：多个数的大小比较，主要根据幂函数、指数函数、对数函数等的性质进行．具体方法是：两两比，与0比，与1比.

若指数相同，底数不同，则考虑幂函数性质；反之，考虑指数函数性质〈见本章第三部分〉.



42．(1) 已知 $y=f(x)$ 的图象，如何作出 $y=|f(x)|$，$y=f(|x|)$ 的图象；

(2) 已知 $y=f(x)$ 的图象如上，画出 $y=|f(x)|$，$y=f(|x|)$ 的图象；

(3) 分别画出 $y=|3x-5|$ 与 $y=3|x|-5$ 的图象，指出它们的单调区间；

(4) 画出 $y=|x^2-4x-13|$ 的图象，指出它的单调区间；

(5) 画出 $y=|x|^2-4|x|-13$ 的 图 象， 指出它的单调区间.

43. (1) 正比例函数是奇函数还是偶函数？是增函数还是减函数？

(2) 反比例函数是奇函数还是偶函数？是增函数还是减函数？

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ 的单调区间是什么？

44. 如果 $f(x)=x^2+ax+b$，$m\neq n$，

求证 $f\left(\dfrac{m+n}{2}\right)<\dfrac{f(m)+f(n)}{2}$.

45. (1) 已知 $f(x-2)=3x+1$，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$ 的解析式；

(3) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\quad(x>0)$，求 $f(x)$ 的解析式；

(4) 若 $f(x+2)-f(x)=8x+2$，求 $f(x)=mx^2+nx+5$ 中的 m 和 n；

(5) 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$，当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时有极小值 $-\dfrac{3}{4}$，又 $f(x)=0$ 的两根 x_1、x_2 满足 $x_1^3+x_2^3=9$，试确定 $f(x)$ 的表达式；

(6) 已知二次函数 $y=f(x)$ 的偶函数，极小值是 -1，它的图象截直线 $x-y=0$ 所得的线段长为 $2\sqrt{6}$，确定

$f(x)$的表达式.

46. 二次函数 $y=f(x)$ 的图象顶点是 $(3,-2)$，一次函数 $y=g(x)$ 的图象平行于直线 $y=2x+6$，且这两个函数的图象都过 $(-1,6)$，求：

(1) $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的解析式；

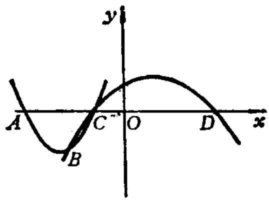
(2) x 在什么范围内，

① $f(x)=g(x)$，② $f(x)>g(x)$，③ $f(x)<g(x)$.

47. 设在边长为 5cm 的正方形 $ABCD$ 的边界上，有动点 P 从顶点 B 出发，依次经 C, D, A 而回到 B，今以 x 表示动点 P 走过的路程，y 表示以 BP 为一边的正方形面积，试求 $y=f(x)$ 的解析式并作它的图象.

48. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$，求证：$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$.

49. 求函数 $y=|x-2|$ 的图象和斜率为 $\frac{1}{3}$、在 y 轴上的截距为 2 的直线所围成的封闭图形的面积.



50. 如图，抛物线 $y=ax^2+2bx+c$ 与 $y=(a+1)x^2+2(b+2)x+c+3$，一条通过 A、B、C，另一条通过 B、C、D.

(1) 哪一条通过 A、B、C？哪一条通过 B、C、D？

(2) 求证无论 a、b、c 取何值 $(a\neq 0)$，两抛物线交点的横坐标不变；

(3) a、b、c 满足什么条件，两抛物线交点有相同的纵坐标？并求出这纵坐标；

(4) 如 $|AB|=|BC|$，$|CO|=|OD|$，求 a、b、c 的值.