



中学数学丛书

彭咏松 周世俊

一元二次方程



ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHI



一元二次方程

彭咏松 周世俊

湖北教育出版社

内 容 提 要

本书对方程的基本概念和一元二次方程的基本理论作了较系统、深入的分析 and 阐述，并详细地讨论了一元二次方程理论在论证某些数学问题中的应用。

本书内容的阐述，力求深入浅出，通俗易懂，前后呼应，赋有启发性。有的章节还采用了探究式的写法，这对于帮助中学生及自学青年学习探索解题途径和研究数学问题是很裨益的。对中学数学教学亦有较大的参考意义。

中学数学丛书

一 元 二 次 方 程

彭咏松 周世俊

*

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行

沔阳县印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 3.875印张 1插页 84,000字

1984年8月第1版 1984年8月第1次印刷

印数：1—23,000

统一书号：7306·112 定 价：0.42元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师 and 数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学

概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便对同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

前 言

本书对方程的基本概念、变形和一元二次方程的基本理论及其应用作了较系统、深入的分析和阐述。全书共分四章。

“方程及其变形”一章着重对方程的有关概念和方程变形中一些容易忽视和疑难的问题作了阐述，以帮助读者加深对这些内容的理解。

“一元二次方程”一章除介绍各种解法及解法之间的相互联系外，还介绍了求根公式、韦达定理的多种证法以及应用判别式、韦达定理解题的一些方法和技巧，以开拓读者思路；

“一元二次方程的应用”一章主要讲一元二次方程本身在解决数学问题，如因式分解，解某些非一元二次方程和论证某些数学问题中的应用。突出如何用代换法化繁为简、化难为易这一基本的数学思想以及构造方程、进而运用方程的有关理论论证某些数学问题的思想方法。并注重例题解前的分析和解后的小结以及前后例题间的孕伏与延伸关系。对培养观察、联想能力，提高分析问题和解决问题的能力将有所帮助；

“带参数的一元二次方程实根分布问题”一章的例题、习题，散见于许多书刊之中，其解法多借助于二次函数图象的直观性或直接用韦达定理和判别式，前者缺乏理论上的解释，常易出错。后者计算甚繁，有时还因涉及到解高次不等式（或高次方程）而不易获得正确答案。本书从实例入手，试用探究式的写法，逐步地深入，以得出解决这类问题的一般结论。从而与读

者共同学习研究数学问题的方法，提高解决数学问题的能力。

本书各章节后均附有适量的习题，供读者练习。对较难的习题，在书末都给出了解答或解法提示。

本书除可作中学生的课外读物和具有中学文化水平的青年阅读外，还可供中学数学教师教学时参考。

限于我们的业务水平和教学经验，本书中出现的缺点和错误，还请读者批评、指正。

作 者

一九八三年四月

出版说明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们敬请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

《中学数学丛书》

书 目

湖北省暨武汉市数学会主编

湖北教育出版社出版

整数的性质及其应用

有理数与整式

循环小数

因式分解

一元二次方程

不等式

分式与根式

指数与对数

函数及其图象

复数与三角

排列组合与二项式定理

数列与极限

极值

一元代数方程纵横谈

相似形与圆

代数与三角在几何中的应用

直线与平面

平面向量

多面体与旋转体

直线与圆的方程

三角级数

三角函数

反三角函数与三角方程

解三角形

坐标系与坐标变换

圆锥曲线

极坐标与参数方程

集合

逻辑代数初步

线性代数初步

概率统计初步

微积分初步

归纳与递推

为什么错?

怎样探索解题途径

目 录

第一章 方程及其变形	1
§ 1. 方程概论.....	1
练习 1. 1	5
§ 2. 方程的变形.....	5
练习 1. 2	13
小结.....	16
第二章 一元二次方程	17
§ 1. 一元二次方程.....	17
§ 2. 一元二次方程的解法.....	18
练习 2. 2	30
§ 3. 一元二次方程根的判别式.....	31
练习 2. 3	35
§ 4. 一元二次方程根与系数的关系.....	36
练习 2. 4	49
小结.....	51
第三章 一元二次方程的应用	52
§ 1. 在因式分解中的应用.....	52
练习 3. 1	54
§ 2 在解方程中的应用.....	54
练习 3. 2	65
§ 3. 在论证某些数学问题中的应用.....	67
练习 3. 3	72

§ 4. 在解决实际问题中的应用	72
练习 3. 4	76
小结	78
第四章 带参数的一元二次方程实根的分布问题	
§ 1. 问题的提出	79
§ 2. 一道竞赛题的启示	79
练习 4. 2	84
§ 3. 关于实根分布问题的几个定理	84
练习 4. 3	99
小结	102
部分练习答案与提示	104

第一章 方程及其变形

§1. 方程 概 论

(一) 方程的有关概念

在中学数学课程里定义：含有未知数的等式叫做方程。从这一定义可以看出，方程一定是等式，不是等式肯定不是方程。

但 $3^2 - 1 = 8$ ， $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$ 之类的等式也不是方程，

因为这些不等式不含有未知数。在等式

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \quad ①$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1 \quad ②$$

$$4x^2 + 5 = 2(2x - 3) \quad ③$$

$$3x - 1 = 2x + 3 \quad ④$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ⑤$$

中，①—④都是关于x的方程。在等式⑤中，如果把a、b、c当成已知数，x当成未知数，则⑤也是关于x的方程。因此要判断一个等式是不是方程，要看它是否含有字母，而且所含字母是否表示未知数。

方程与等式这两个概念之间的关系是一种从属关系。等式是种概念，方程是属概念。方程比等式多出的那些内涵——“含有未知数”即属差。

利用函数概念，方程还有如下定义：

$F_1(X_1, X_2, \dots, X)$ 和 $F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是在它们的公共定义域里所共同研究的两个函数，那末等式

$F_1(X_1, X_2, \dots, X) = F_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ⑥ 就叫做关于未知量 $X_1, X_2, \dots, X$ 的方程。

如果我们把前一种定义中等式两边的关于未知量的解析式，理解为关于这些未知量的函数式，容易看出，两种定义在本质上是一致的。

方程里的未知数，我们把它叫做“元”。只含一个未知数的方程叫一元方程。它的一般形式是

$$f_1(X) = f_2(X) \quad ⑦$$

在方程⑦的容许值里，取 $x = a$ ，如果 f_1 和 f_2 在 $x = a$ 不等，

$$f_1(a) \neq f_2(a)$$

我们就说， $x = a$ 不满足方程⑦。

如果 f_1 和 f_2 在 $x = a$ 时相等，即

$$f_1(a) = f_2(a)$$

我们就说 $x = a$ 满足方程⑦。这时就称数 a 为方程⑦的解。

一元方程 $f_1(x) = f_2(x)$ 的解，又叫做它的根。这时，在点 $x = a$ ，函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的值相等。

对于方程⑥可以类似地规定它的解的意义。

对于一个方程，关于解有以下不同情况：

方程①的未知数的许可值是所有实数；方程②的未知数的许可值是 $x \neq -1$ 的所有实数；而对于未知数的每个许可值，函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的值都相等，即每个许可值都是方程的解。在这种情况下，我们就说方程⑦是恒等式。这时，方程的解集是无限集，也就是方程的许可值集。

方程③的许可值是全体实数，但无论 x 取任何数，它总是

不成立。在这种情况下的方程叫**矛盾方程**。矛盾方程没有解。或者说矛盾方程的解集是空集。

观察方程④，虽然未知量的许可值是**所有实数**，但只有 $x = 4$ 才满足方程。在这种情形下，方程的解集是函数 f_1 和 f_2 的共同的定义域的真子集。

解方程，就是要求出方程所有解的集。具体地说，就是：

(1) 确定是否有未知量 x 的许可值满足方程⑦；

(2) 如果有，求出所有这些值。

前已述及，解集可以是有限集，可以是无限集，也可以是空集。

还必须明确的是，同一个方程，在不同的数集上研究时，它的解集可能不同。例如方程

$$(x-1)(x^2-2)(x^2+9)=0$$

在有理数集的解集是 $\{1\}$ ；在实数集的解集是 $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ；在复数集的解集是 $\{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3i, -3i\}$ 。

(二) 方程的分类

在中学里所研究的方程，按照施行于未知数的数学运算的性质可分：

(1) **代数方程** 假如方程 $f_1(x) = f_2(x)$ 中，只含有对未知量的代数运算（加、减、乘、除、整次方幂乘方、开方），即 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是代数函数，那末就叫方程 $f_1(x) = f_2(x)$ **代数方程**。例如

$$4x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \text{①}$$

$$x + \frac{3}{x-1} = -\frac{5}{x+1} \quad \text{②}$$

$$\sqrt{3x+2} = \sqrt{7x-1} - 1 \quad \textcircled{3}$$

等都是代数方程。

在代数方程 $f_1(x) = f_2(x)$ 中，如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是 x 的有理式（只含有加、减、乘、除、乘方运算），这样的方程叫**有理方程**。如方程①、②都是有理方程。如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 至少有一个是未知数 x 的无理式（含有对未知数表达式的开方运算），这样的方程叫**无理方程**（又叫根式方程）。如方程③是无理方程。但要注意， $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 2 = 0$ 不是无理方程，而是有理方程。因为对未知量 x 没有进行开方运算。 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ 它们虽是无理数，但只是方程的系数。

在方程 $f_1(x) = f_2(x)$ 中，如果 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是整式（分母中不含有未知数），这样的方程就叫**整式方程**。如方程①是整式方程。如果 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 中至少有一个是分式（分母中含有未知数），则叫**分式方程**。如方程②就是分式方程。又如，

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + 1 = 0 \text{ 不是分式方程，而是整式方程。因为这个}$$

方程里的代数式分母不含有未知数， $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{5}$ 等虽都是分数，但它们是未知数的系数或常数项。

对于整式方程，可以按照未知数的最高次数分为一次方程、二次方程、三次方程等等。例如： $3x + 2y + 1 = 0$ 、 $x^2 + 2y^2 = 4$ 、 $x^3 - x + 1 = 0$ 分别是一次、二次、三次方程。

在一元方程里，三次以上的方程叫**高次方程**。但要注意，要确定一个整式方程的次数，必须先把这个方程化简并加以整理，再看未知数的最高次数是几就是几次方程。如方程

$$(x-1)^3 - (x-1)(x^2 + 2x - 5) = 7x^2$$

化简整理得

$$11x^2 - 10x + 6 = 0$$

所以它是二次方程。

(2) 超越方程 假如方程 $f_1(x) = f_2(x)$ 中含有对未知数的超越运算(指数运算、对数运算、三角运算、反三角运算等), 那么这个方程就叫超越方程。根据施行的超越运算的不同, 而分别叫做指数方程、对数方程、三角方程、反三角方程等等。

例如 $3^x = 5^{2x}$, $\log_2 x = \frac{1}{3}$, $\sin x + \cos x = -1$, $\arccos x = \frac{\pi}{4}$ 等都是超越方程, 且分别为指数方程、对数方程、三角方程、反三角方程。

但是 $x \sin 30^\circ = \cos 45^\circ$ 及 $x \lg 2 - \lg 3 = 0$ 等都不是超越方程而是代数方程。因为 $\sin 30^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 、 $\lg 2$ 、 $\lg 3$ 等都是确定的数, 这里並沒有对未知数进行超越运算。

练习 1.1

1. 等式、恒等式和方程有什么区别? 举例说明。
2. 什么叫解方程? 什么叫方程的解? 什么叫同解方程?

§ 2. 方程的变形

解方程就是要求出方程的解集。就代数方程而言即要分离方程中的系数和未知数, 这就需要对方程进行变形。

(一) 方程的同解性

如果方程

$$f_1(x) = f_2(x)$$

①

是原方程, 而

$$f'_1(x) = f'_2(x) \quad (2)$$

是变形后的方程（导出方程），那末这两个方程可能有下述三种关系：

(1) 在同一个数集里，方程①的所有解都是方程②的解，并且方程②的所有解都是方程①的解，换句话说，两个方程的解集相同，那么这两个方程叫同解方程（或者叫等价方程）。

例如方程 $5x + 3 = 3x - 1$ 和方程 $2x = -4$ 是同解方程，因为它们都有解 $x = -2$ ；方程 $x^2 - 9 = 0$ 和 $x - 3 = 0$ 不同解，因为方程 $x^2 - 9 = 0$ 有解为 $x = 3$ 和 $x = -3$ ，而 $x - 3 = 0$ 却只有解 $x = 3$ 。

(2) 方程②除具有方程①的所有解之外，还具有其他某些解，也就是说，方程增添了根。这样增加的一些根，叫增根。

(3) 方程①所有的根不都是方程②的根，也就是说方程①失了根。

在(2)，(3)两种情形下，方程①和②叫做不同解（或不等价）的。

在方程①和方程②不同解时，如果方程①的所有解是方程②的部分，或者说方程①的解集是方程②解集的真子集，那么方程②叫方程①的结果。

从方程同解的定义可知：

所有无解的方程都是同解的，因为它们的解集相同，都是空集。

许可值相同的包含同样多未知数的恒等方程是同解的，因为它们的解集就是许可值集。

未知数不同而解集相同的两个方程是同解的，例如 $(x - 3)^2 = 0$ 和 $y^2 - 6y + 9 = 0$ 同解。

需要指出，对于整式方程，讨论方程的同解性，还需考虑