结构振动与控制

李宏男　李忠献
祁　皑　贾　影　著

中国建筑工业出版社

结构振动与控制

李宏男　李忠献
祁　皑　贾　影　著

中国建筑工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构振动与控制/李宏男等著．—北京：中国建筑工业出版社，2005

ISBN 7-112-07373-1

Ⅰ．结… Ⅱ．李… Ⅲ．①建筑结构—结构振动—振动分析②建筑结构—结构振动—振动控制 Ⅳ．TU311.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 038294 号

结构振动与控制

李宏男 李忠献 祁皑 贾影 著

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店总店科技发行所发行

北京市兴顺印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张：26½ 字数：660 千字

2005 年 8 月第一版 2005 年 8 月第一次印刷

印数：1—3000 册 定价：**48.00** 元

ISBN 7-112-07373-1

（13327）

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题，可寄本社退换

（邮政编码 100037）

本社网址：http：//www.china-abp.com.cn

网上书店：http：//www.china-building.com.cn

随着学科的发展，结构的振动与控制已经成为土木工程及相关领域中两个重要的组成部分，它们的联系越来越密切。本书全面论述了结构振动与减振控制两方面的内容，共分四篇。第一篇介绍结构动力学的基本原理，单自由度体系、多自由度体系和无限自由度体系的振动，自振特性与动力反应的数值解法。本篇后三章介绍工程地震、地震作用及结构随机地震反应的基本内容，这些内容为后续章节奠定了基础。第二篇介绍结构被动减振控制，主要内容包括基底隔震、调谐质量阻尼器、调液质量阻尼器、耗能阻尼器及其他减振装置等。第三篇介绍半主动控制和混合控制方法，主要介绍半主动变刚度、变阻尼控制，混合质量阻尼器 HMD 控制和基底隔震-主动控制系统等。第四篇除简要介绍主动控制的原理、方法和工程应用外，着重阐述了结构控制中的一个新的研究方向——结构智能控制。

本书可作为有关专业大学高年级本科生和研究生的学习用书，也可供土木建筑、水利工程、海洋与船舶工程、工程力学和有关方面的科技人员参考。

责任编辑：赵梦梅
责任设计：赵　力
责任校对：刘　梅

作者简历

李宏男 1957年8月出生于沈阳市，1982年、1987年和1990年分别获得学士、硕士和博士学位，并于1990至1994年分别在大连理工大学和美国弗吉尼亚理工学院与州立大学做博士后研究员，1993年任教授。现任大连理工大学土木水利学院院长，“长江学者奖励计划”特聘教授，国家杰出青年科学基金获得者，国家自然科学基金委员会学科评审组成员，国家级有突出贡献的中青年科技专家，享受国务院特殊津贴。兼任抗震界具有较高威望的国家自然科学核心期刊《地震工程与工程振动》编委会副主任，《工程抗震》副主编，《建筑结构学报》、《工程力学》、《防灾减灾工程学报》等8个学报的编委。还兼任中国土木工程学会理事，中国振动工程学会理事，中国振动工程学会结构振动控制分会副理事长，中国振动工程学会随机振动分会副理事长等职务。

李忠献 1961年12月生于安徽省枞阳县。国家杰出青年科学基金获得者，天津市授衔专家。1991年天津大学与意大利联合培养博士生毕业、获得工学博士学位，1996年晋升教授，1998年聘为博士生导师。现任天津大学土木工程一级学科负责人、桥梁工程研究所所长。兼任国家自然科学基金委员会学科评审组成员、中国勘察设计协会抗震防灾分会副会长、中国振动工程学会结构振动控制分会常务理事以及中国建筑学会抗震防灾分会、中国土木工程学会桥梁与结构工程分会和中国土木工程学会市政工程分会等理事、国际桥梁与结构工程学会以及美国土木工程学会会员以及《建筑结构学报》、《工程力学》、《地震工程与工程振动》和《工程抗震与加固改造》等编委。

祁皑 1964年3月生于沈阳市，现任福州大学土木建筑工程学院副院长，国家自然科学基金获得者。1985年、1988年和1998年分别获得学士、硕士和博士学位。2003年任教授。

贾影 1963年1月生于辽阳市。毕业于大连理工大学，获工学博士学位。现为北京交通大学教授，从事教学与科研工作。主持并参与过辽宁省博士启动基金项目、辽宁省教育厅研究项目、国家教委基金项目、交通部规范研究项目、国家自然科学基金项目、辽宁省自然科学基金重大项目、辽宁省教育厅攀登计划项目等的科研工作。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

序

结构振动现象随处可见，其原因多种多样。结构振动严重时会导致其性能劣化、丧失稳定性而发生破坏甚至倒塌，从而引发严重的土木工程灾害。地震灾害以及风灾害无不与结构振动有关。《结构振动与控制》一书系统地阐述了结构振动的原理，有机地将控制理论与结构抗震设计相结合，从而为土木工程结构的抗震设计提供了一种安全可靠、行之有效的理论和方法。

《结构振动与控制》一书层次分明，由浅入深、重点突出。首先详尽阐述了结构振动的基本原理，包括单自由度体系、多自由度体系和无限自由度体系的振动，自振特性与动力反应的数值解法以及工程地震、地震作用和结构随机地震反应的基本内容，使读者清晰地掌握结构的振动现象、并了解结构抗震设计的关键所在；然后用较大篇幅介绍了结构振动控制的理论与方法，包括结构被动减振控制方法（主要有基底隔震、调谐质量阻尼器、调液质量阻尼器、耗能阻尼器及其他减振装置等）、半主动控制和混合控制方法（主要有半主动变刚度、变阻尼控制，混合质量阻尼器 HMD 控制和基底隔震—主动控制系统等）、以及主动与智能控制的原理、方法和工程应用，且注重控制理论与结构抗震设计的有机结合，使读者在掌握结构振动控制理论和方法的同时，能够直接应用于结构抗震设计中。

《结构振动与控制》一书特色鲜明，资料丰富、内容新颖。在承袭传统结构振动理论与方法的基础上，吸收了国内外在结构振动控制领域的最新研究成果，尤其是凝聚了作者近年来在结构减震与被动控制、结构半主动与混合控制以及结构主动与智能控制方面的最新研究成果，使读者在掌握结构振动与控制的基本理论与方法的同时，能够全面了解我国在结构振动控制领域的研究现状与今后的发展方向，这是我国第一本系统阐述结构振动与控制理论和方法的著作。

《结构振动与控制》融理论与实践于一体，是一本很值得一读的教科书和技术参考书。不仅可以作为从事土木工程结构抗震设计和研究科技人员的重要参考书，而且可以作为结构工程、防灾减灾工程与防护工程等学科的研究生及高年级学生进行创新教学的一本优秀教材，它的出版必将为推动我国结构振动与控制理论与技术的应用和发展发挥重要的作用。

谢礼立

中国工程院院士

2005/07/05

前　　言

振动是工程中经常遇到的一种现象，它是机械运动的一种特殊形式。在近代科技领域中，几乎所有学科无不涉及有关的振动问题，如土建、交通、机械、海洋、电力、航空航天和生物医学等。而自动控制理论源于力学，它是指在没有人直接参与的情况下，利用控制装置使被控对象中的某一个物理量(或多个物理量)能准确地按照期望的规律去运行。随着科学技术的发展，研究方向的不断拓广，控制理论在土木工程结构振动领域中得到了越来越多的应用。振动与控制的联系越来越密切，它已成为一个新的学科增长点。

本书根据作者为结构工程专业研究生讲授的《结构动力学》和《地震工程学》中的结构减振控制部分，以及作者多年的研究成果编写而成。书中全面阐述了结构振动与减振控制两方面的内容，特别注意两方面的联系。在编写过程中，力求突出以下特色：(1)在阐明振动与控制基本原理的同时，注意理论与实践的结合。(2)在写法上注意简捷，突出重点，深入浅出。(3)在总结作者多年科研和教学经验的基础上，注意吸收国内外最新研究成果，尤其是工程应用实例。

书中内容涉及广泛，共分四篇。第一篇介绍结构动力学的基本原理，单自由度体系、多自由度体系和无限自由度体系的振动，自振特性与动力反应的数值解法。本篇后三章介绍工程地震、地震作用及结构随机地震反应的基本内容，这些内容为后续章节奠定了基础。

结构减振控制可分为被动控制、主动控制、半主动控制和混合控制。被动控制不需要外部提供能量，而依靠结构构件之间、结构与辅助系统之间相互作用消耗振动能量，从而达到减振的目的。主动控制需要外部提供能量，来减小结构的振动。半主动控制以被动控制为依托，以较小的能量对控制状态进行切换，来获得较好的控制效果。混合控制是以不同的控制方法相结合，发挥各自方法的优点，使主动控制提供较小的控制力就可以有效地减小结构的振动。

按照以上思路，第二篇介绍结构被动减振控制，主要内容包括基底隔震、调谐质量阻尼器、调液质量阻尼器、耗能阻尼器及其他减振装置等。第三篇介绍半主动控制和混合控制方法，主要介绍半主动变刚度、变阻尼控制，混合质量阻尼器 HMD 控制和基底隔震-主动控制系统等。第四篇除简要介绍主动控制的原理、方法和工程应用外，着重阐述了结构控制中的一个新的研究方向——结构智能控制。

本书总体布局和写作大纲由李宏男提出，第一篇和第二篇的第十章、第十三章和第十四章 14.1 节和 14.2 节由李宏男执笔，第十一章和第十二章由贾影执笔，第十四章 14.3 节和第三篇由祁皑执笔，第四篇由李忠献执笔。

应该指出，结构振动与减振控制的内容十分丰富，书中难免挂一漏万，我们将在今后的研究和教学中逐步充实完善。

书中部分研究成果得到了国家自然科学基金委员会和建设部、国家教委资助优秀年轻教师计划和辽宁省优秀青年科研人才培养基金的资助，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中必有疏漏及错误之处，衷心希望读者批评指正。

李宏男

2004 年 10 月于大连

目　　录

第一篇　结　构　振　动

第二篇　结构被动减振控制

第四篇 主动控制与智能控制

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 一 篇

结　构　振　动

第一章　结构动力学的几个基本原理

§1.1　几个基本概念

1. **约束**：限制系统中各个质点的位置和速度的预定条件称为**约束**。在一般情况下，约束所起的作用可以用如下约束方程来表示

$$f(\boldsymbol{r}_i,\ \dot{\boldsymbol{r}}_i,\ t)=0 \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{r}_i=x_i\boldsymbol{i}+y_i\boldsymbol{j}+z_i\boldsymbol{k}$ 为质点 m_i 的位置向量，如图 1-1 所示；$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 为 m_i 的速度；t 为时间。

用直角坐标表示时，式(1-1)为

$$f(x_i,\ y_i,\ z_i,\ \dot{x}_i,\ \dot{y}_i,\ \dot{z}_i,\ t)=0 \tag{1-2}$$

约束可分成如下几种

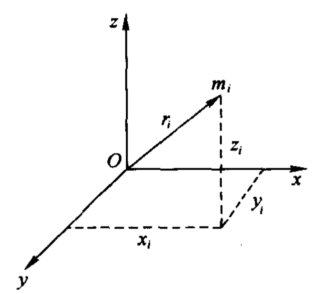

图 1-1　质点 m_i 的位置向量图

约束 {
- 位置(几何或有限)约束 { 稳定约束；非稳定约束 }
- 速度(运动或微分)约束 { 稳定约束；非稳定约束 }
}

稳定约束为约束方程中不显含 t 的约束，而非稳定约束为约束方程中显含 t 的约束。位置约束以及可以积分成为位置约束的速度约束称为**完整约束**；不能积分成为位置约束的速度约束称为**非完整约束**。只含有完整约束的系统称为**完整系统**；含有非完整约束的系统称为**非完整系统**。后面我们讨论的均为稳定的力学系统。

2. **广义坐标与自由度**：我们来研究一个自由质点在空间的位置，它必须用三个独立坐标来确定。设由 n 个质点组成的质点系，其中每个质点都是自由的，则确定该质点系位置的独立坐标数是 $3n$ 个。

对于一个非自由质点系，由于受到约束，系统中各质点的位置坐标将满足一定的约束条件，它们不是完全独立的。设一个由 n 个质点组成的系统，它受到 k 个约束，即

$$f_\alpha(\boldsymbol{r},\ t)=0\quad (\alpha=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k) \tag{1-3}$$

这时体系的独立坐标数目等于

$$N=3n-k \tag{1-4}$$

因此，确定一个质点系的位置所需的独立坐标的数目称为该质点系的自由度的数目，简称为**自由度**。

一般情况下质点系的质点和约束条件都很多，而自由度的数目很少，即 n 与 k 的数目很大而 N 的数目很小。因此为了确定质点系的位置，用适当选择的 N 个独立参数，要比用 $3n$ 个直角坐标和 k 个约束方程方便得多。因此，能确定体系几何位置的彼此独立的量

称为该体系的**广义坐标**。广义坐标的选择不是唯一的，不同的选择只反映描述力学体系位置的外在差异，而不会改变系统本身的内在固有特性。显然，广义坐标的数目就等于自由度的数目。

一般地，设 n 个质点组成的质点系，具有 N 个自由度，取 q_1，q_2，…，q_N 为其广义坐标，则受到稳定约束时，体系内任一质点 M_i 的直角坐标及矢径可表示为广义坐标的函数

$$\left.\begin{aligned} x_i &= f_{xi}(q_1, q_2, \cdots, q_N) \\ y_i &= f_{yi}(q_1, q_2, \cdots, q_N) \\ z_i &= f_{zi}(q_1, q_2, \cdots, q_N) \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1-5}$$

$$\boldsymbol{r}_i = f_{ri}(q_1, q_2, \cdots, q_N) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1-6}$$

若所受的约束是非稳定约束时，则各质点的直角坐标及矢径不但由广义坐标确定，还与时间 t 有关，这时应表示为广义坐标及时间的函数

$$\left.\begin{aligned} x_i &= f_{xi}(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \\ y_i &= f_{yi}(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \\ z_i &= f_{zi}(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1-7}$$

$$\boldsymbol{r}_i = f_{ri}(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1-8}$$

3. **有势力和势能**：设有一质点系 $m_i(i=1, 2, \cdots, n)$，其各质点所受的力 $\boldsymbol{F}_i$ 中的每一个力的大小和方向只决定于体系所有各质点的位置，且体系从某一位置 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$移到另一位置，各力所作的功之和只决定于位置 A_i 和 B_i，而与各质点运动的路径无关，则称 $\boldsymbol{F}_i$ 为**有势力**。这些力形成的力场称为**势力场**。重力、牛顿引力及弹性力的功都与质点运动路径无关，这些力都是有势力。

设质点在力场中受到的力为 $\boldsymbol{F}$，当质点从某一位置 $A_1(x_1, y_1, z_1)$运动到另一位置 $A_2(x_2, y_2, z_2)$时，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W = \int_{A_1}^{A_2} (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z) \tag{1-9}$$

式中，X、Y 和 Z 是力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影。这一积分是沿着质点运动的路径曲线的线积分，要使这一积分与曲线形状无关，必须是 $X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z$ 等于质点位置坐标(x, y, z)的某一单值连续函数 $U(x, y, z)$的全微分，即

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z=\mathrm{d}U \tag{1-10}$$

函数 U 称为**势函数**。于是，当质点从 A_1 运动到 A_2 时，有势力的功等于

$$W = \int_{A_1}^{A_2} \mathrm{d}U = U_2 - U_1 \tag{1-11}$$

式中，U_1 和 U_2 是势函数在 A_1 和 A_2 处的值。因此，当质点沿一条闭合的路径曲线运动一周时，有势力所作的功等于零。有势力也称**保守力**，势力场也称**保守力场**。

在势力场中任意选定某一位置作为基准位置，或称“零位置”。当质点系从势力场中任一给定位置运动到“零位置”时，有势力所作的功称为质点系在给定位置的**势能**。

从以上定义可知，质点系在某一位置的势能，表明它在该位置时所具有的作功的能力，而这种能力则以质点系从该位置运动到零位置时，有势力所作的功来度量。如果用 V

来代表势能，则根据势能定义，由公式(1-11)有

$$V=U_0-U \tag{1-12}$$

式中，U_0 和 U 分别为势函数在零位置及给定位置处的值。质点系在“零位置”时，它的势能等于零，因为这时 $U=U_0$。

在式(1-12)中，因为 U_0 为一常数，所以对于质点

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{\partial U}{\partial z}$$

于是有

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x},\ Y=-\frac{\partial V}{\partial y},\ Z=-\frac{\partial V}{\partial z} \tag{1-13}$$

对于质点系，则有

$$X_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\ Y_i=-\frac{\partial V}{\partial y_i},\ Z_i=-\frac{\partial V}{\partial z_i} \tag{1-14}$$

式(1-13)和(1-14)表明，作用于质点或质点系的有势力在各个坐标轴上的投影，等于势能对于相应坐标的偏导数冠以负号。

4. **实位移和虚位移**：如果位移不仅满足约束方程，而且还满足运动方程和其初始条件，则称为**实位移**。也即是在该情况下质点系的真实位移。在分析力学中，将质点系在约束所允许的情况下可能产生的微小位移，称为体系的**可能位移**。显然，任何微小时段 dt 中的实位移增量 $d\boldsymbol{r}_i$ 都构成一组可能位移；但反之，一组可能位移却不一定能形成实位移，因为它不一定满足运动方程和初始条件。

下面我们引入虚位移的概念。一个力学体系在满足约束条件情况下，由原位置移动任何微小位移。这一位移并非质点或质点系在实际运动中真实发生的，而只是想象中可能发生的瞬间位移，它只取决于质点或质点系在此瞬时的位置和加在它上面的约束，而不是由于时间的变化所引起的，我们称这种位移为**虚位移**。

例如图 1-2 中曲柄连杆机构的虚位移，可由曲柄 OA 转过一微小角度 $\delta\varphi$ 而得到，即由位置 OAB 到 $OA'B'$。曲柄销 A 的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$（=矢$\overline{AA'}$）垂直于 OA；滑块 B 的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_B$（=矢$\overline{BB'}$）则沿导槽，方向各如图。曲柄 OA 如向相反方向转动一微小角度，也是约束所允许的，在这种情况下，整个系统及其中各点将有相反方向的虚位移。

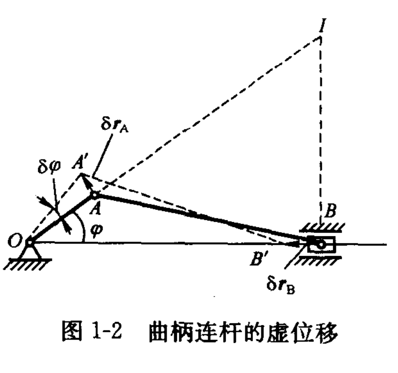

图 1-2 曲柄连杆的虚位移

虚位移与实位移是有区别的。实位移是在一定的力作用下和给定的初始条件下运动而实际发生的；虚位移则是在约束允许的条件下可能发生的。一个静止的体系不会发生实位移，但可以使其有虚位移。实位移具有确定的方向，可能是微小值，也可能是有限值；虚位移则是微小位移，视约束情况可能有几种不同的方向。实位移是在一定的时间内发生的；虚位移只是纯几何的概念，完全与时间无关。

5. **理想约束**：如果体系所受的约束力在任何虚位移上所作功的总和等于零，则我们称这种约束为**理想约束**，即可以用数学式表示为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-15}$$

式中，$\boldsymbol{f}_i$ 为作用在第 i 个质点上的约束反力；$\delta \boldsymbol{r}_i$ 为虚位移。常见的理想约束有：光滑支撑面、刚体的固定支点、连接两刚体的光滑铰链、连接两质点的无重刚杆和不可伸长的绳索等。

§1.2 虚功(Virtual Work)原理

虚功原理(Principle of Virtual Work)是非自由系静力学最普遍的原理，它也适用于自由系。虚功原理和 D'Alembert 原理(见下节)结合起来，就构成非自由系动力学最普遍的原理。

下面介绍虚功原理。

虚功原理的内容是：具有稳定、理想约束的力学体系，原来处于静止状态(相对于惯性参考系)，则此体系保持平衡(静止)的充要条件是：作用于体系的所有主动力在任何虚位移上的元功之和等于零。

设有 n 个质点的体系，$\boldsymbol{F}_i$ 代表作用于任一质点 m_i 上的主动力的合力，则体系保持静止的充要条件是：在任何虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 上的元功之和等于零，即

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-16}$$

此式称为**虚功方程**。

下面来证明上述原理。

1. 必要性证明：即证明体系平衡时，式(1-16)成立。

当体系平衡时，任一质点 m_i 都成平衡，因而其主动力的合力 $\boldsymbol{F}_i$ 与约束力的合力 $\boldsymbol{R}_i$ 之和必为零，即

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i = 0$$

设 m_i 有虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$，则 $\boldsymbol{F}_i$ 与 $\boldsymbol{R}_i$ 在虚位移上的元功之和为

$$\overline{\delta W_i} = \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

对体系有

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

因体系所受约束都是理想约束，约束力在任何虚位移上的元功之和等于零，即 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$，于是得到

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

这就是必要性证明。

2. 充分性证明：即证明式(1-16)成立时，体系必成平衡。

应用反证法。假设式(1-16)成立，但体系不平衡，有一个以上的质点由静止开始运动。这时作用于质点 m_i 上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 与约束力 $\boldsymbol{R}_i$ 形成一个合力 $\boldsymbol{P}_i(=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)$。质点 m_i

在$\boldsymbol{P}_i$的作用下必有与$\boldsymbol{P}_i$同方向的微小实位移，该微小实位移必为虚位移之一，设以$\delta\boldsymbol{r}_i$表示，于是有

$$\boldsymbol{P}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{P}_i \cdot |\delta\boldsymbol{r}_i| > 0$$

对于任何不平衡质点，都可以写出以上不等式，故有

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i > 0$$

因为是理想约束，上式第二项为

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i > 0$$

这与原假设相矛盾。所以，体系不可能运动，而必定成平衡。至此，原理得到完全证明。

虚功原理的数学表达式除式(1-16)外，还可以表示为标量式

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = 0 \tag{1-17}$$

式中X_i、Y_i、Z_i和δx_i、δy_i、δz_i分别为主动力$\boldsymbol{F}_i$和虚位移$\delta\boldsymbol{r}_i$在三个坐标轴x、y、z上的投影。式(1-16)也可以表示成另一种形式

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \, |\delta\boldsymbol{r}_i| \cos\alpha_i = 0 \tag{1-18}$$

式中，α_i为$\boldsymbol{F}_i$与$\delta\boldsymbol{r}_i$的夹角。

一般地，对于具有n个质点所形成的力学体系，如果有k个约束，则独立坐标就减少到$N=3n-k$个，它也就是体系的自由度数。于是将$3n$个不独立的坐标用N个独立参数q_1，q_2，…，q_N及t表示，即

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = \boldsymbol{r}_i(q, t) \tag{1-19}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x_i &= f_{xi}(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \\ y_i &= f_{yi}(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \\ z_i &= f_{zi}(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \cdots, n;\ N<3n) \tag{1-20}$$

式中，q_1，q_2，…，q_N **叫做拉格朗日广义坐标**。

力学体系的虚功原理用广义坐标q来描述将有非常简单的形式。根据式(1-19)，虚位移可以表示为

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-21}$$

式中，δq_j是广义坐标q_j的虚位移。由上式，主动力的虚功可表示为

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \tag{1-22}$$

令

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, N) \tag{1-23}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com