内部资料

预测数学基础

彭美云　赵忠柏　编

吉林省农业机械研究所

.1984,1　　长　春

责任编辑： 汤玉清
印 刷 者： 吉林省工业印刷厂
印 数： 3000本
字 数： 360000

吉林省文化厅（83）227号批准

前　　言

本书是根据举办市场预测学习班的需要，并参照高等学校工科数学教材编审委员会1980年审订的《工程数学教学大纲（草案）》有关概率论及线性代数部分进行编写的。力争做到叙述清楚，内容适当，并有一定数量的结合实际的例题，可作为工程技术人员办学习班或自学之用。

全书分为上、下两册：上册为概率论与数理统计，介绍了概率论的基本概念、随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理；样本及其分布、参数估计、假设检验、回归分析等。在讲清基本知识的前提下，为读者提供了必要的理论基础与计算方法。上册是由吉林工业大学赵忠柏、武汉测绘学院彭美云编写。

下册为概率论解题方法分析与研究和附录：线性代数两部分，内容包括：概率论中常用公式、解题分析和研究；n 阶行列式、矩阵及其运算、向量的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组。我们考虑到，对初次接触概率论知识的读者，最大的困难是不会解题，有的读者因此学不下去，半途而废。为使读者在学习这门课程时取得较好的成效，本书试想从教学实践的体会及学生解题过程中出现的各种问题，对概率论解题方法作一些初步研究，以供初学者参考，线性代数则是学习数理统计、市场予测方法等必备的基础知识。下册是由彭美云编著。

本书是由吉林工业大学沈恒范副教授主审，参加审稿的还有刘承胤、代天时同志，他们对原稿提出了许多宝贵的意见；高仪新同志，对原稿提出了不少有益的建议；吉林省农机研究所曲维同志，给描绘了全部的图形。对此，我们表示衷心的感谢。

由于我们的水平有限，编写工作又较匆促，因此缺点和错误在所难免，欢迎读者批评和指正。

彭美云　赵忠柏

1983.7

预测数学基础

上 册

概率论与数理统计

赵忠柏 彭美云 编

目 录

预 测 数 学 基 础

下　　册

概率论解题方法分析与研究

彭美云　编著

目　　录

附录

线 性 代 数

目　　录

第一章　概率论的基本概念

§1　随　机　事　件

一、随机事件的概念

在科学研究、工程技术和社会上发生的现象是多种多样的，这些现象往往可分为两类：有一类现象是确定性的，例如，在标准大气压下，纯水加热到100℃时必然会沸腾，这种在一定条件下必然会产生的事情称为必然事件，反之，那种在一定条件下，必然不会发生的事情，就称为不可能事件。

例如，掷一颗骰子，“点数为7”是不可能事件。

另一类现象是随机性的，即在相同条件下重复进行很多次试验，尽管试验是在相同条件下进行的，但各次试验结果却不一定相同，进行每一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。举例如下：

（1）在一个口袋中，装有编号分别为1，2，……，5的五个球，从这袋中任取一球，多次做这试验，各次取得的球的号数就不一定相同，每次取得的号数是1，2，……，5中的一个数。但在试验之前不能确定出现哪一个号数。

（2）从次品率为10%的一大批零件中，一件接一件地抽取20个零件（抽得一个零件后，立即放回这批零件中，再抽下一个），多次做这试验，各次取得的20个零件中，次品的个数不一定相同，每次取得的次品的件数是0，1，2，……，20中的某一个数。

（3）在一批高压油泵的柱塞中任意抽取一个，测试它的寿命t，测试结果可知，每个柱塞的使用寿命是不一定相同的，每次试验的寿命都是大于或等于0的某个实数，即均有$t\geqslant 0$。

我们还可举出许多的类似的例子。

所谓随机试验，就是具有下面三个特征的试验称为随机试验。

1）可以在相同条件下重复进行；

2）每次试验的结果可以不同，有偶然性，但能事先明确试验的所有可能结果；

3）进行一次试验前不能预先断言一定会出现哪一个结果。

以后我们所说的试验都是指随机试验，记作E，E_1，E_2，……。

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件。我们把一定条件下的随机事件称为相应随机试验中的随机事件。

为了简单起见，今后我们也常常将随机事件简称为事件，用字母A，B，C等来表示。

为了方便，把必然事件，不可能事件看作特殊的随机事件，且用S表示必然事件，用ϕ表示不可能事件。

二、样 本 空 间

在实践中，我们可看到，在所观察的现象中，有的随机事件比较简单，有的则比较复杂，而复杂事件往往可以由几个简单事件来组成，例如，“掷一颗骰子出现偶数点”这是一个随机事件，这一事件是由“出现2点”、“出现 4 点”，“出现 6 点”这样三个简单的事件组成的，当且仅当这三个简单的事件中有一个发生，“出现偶数点”这一事件就发生。

随机试验中每一个可能的结果称为一个基本事件。

基本事件也称为样本点。

随机试验中所有基本事件组成的集合叫做样本空间。记作 S，S 中的元素就是该试验的基本事件。

在概率论中讨论一个随机试验时，我们首先就要明确它的样本空间。对于一个具体的试验来说，样本空间可以根据试验的具体内容来决定，请看如下例题：

例 1　抛一枚硬币，观察正面（有国徽的一面）、反面出现情况，一次试验就是抛一枚硬币，试验的结果有两个：正、反，即有两个基本事件：正、反，其样本空间为

$$S=\{\text{正、反}\}$$

例 2　将编号为 1 和 2 的两颗麦种进行发芽试验，观察发芽（记为 +）与不发芽（记为 -）出现的情况，在这个试验中，观察两颗麦种是一次试验，试验所有可能结果有 4 个：（+，+），（+，-），（-，+）（-，-）。这里的记号，如（-，+），表示“1 号麦种出现不发芽，2 号麦种出现发芽”。其余类此，样本空间为

$$S=\{(+,+),(+,-),(-,+),(-,-)\}$$

例 3　从包含三件正品（记作a_1，a_2，a_3）和两件次品（记作b_1，b_2）的五件产品中，任意取出两件，具体拿出两件就是一次试验，例如拿出的是a_3和b_1，这就是一个基本事件，记作（a_3，b_1）。所有基本事件共10个，样本空间为

$$S=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_3),$$
$$(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(b_1,b_2)\}$$

例 4　掷一颗骰子，观察出现的点数，其样本空间为

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}。$$

例 5　在一批高压油泵的柱塞中任意抽取一个，测试它的使用寿命，其样本空间为。

$$S=\{t\mid t\geqslant 0\}$$

必然事件就是样本空间S，不可能事件就是空集ϕ。

三、事件的关系与运算

现在，我们定义事件的关系及运算。在以下的叙述中，设S是试验E的样本空间，A，B，A_k（$k=1,2,\cdots\cdots$）是E的事件。

1、子事件与相等事件

如果事件A发生必然导致事件B发生，那末称事件A是事件B的子事件，或者称事件

B包含事件A，或A包含于B中，记作$A \subset B$（或$B \supset A$）。

如果$B \supset A$，又有$A \supset B$，则称事件A与事件B相等，记作$A = B$。

2、事件的和

由事件A与事件B中至少有一个发生所构成的事件，称为事件A与B的和。记作$A \cup B$。

3、事件的积

由事件A与事件B同时发生所构成的事件，称为事件A与B的积，记作$A \cap B$或AB。

对于包含多于两个事件的事件组也可以类似地规定它们的事件的和及事件的积。

例如由事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个事件发生所构成的事件，称为事件A_1，A_2，……，A_n的和，记作$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_i$；

由事件A_1，A_2，…，A_n同时发生而构成的事件，称为事件A_1，A_2，…，A_n的积，记为$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，简记为$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$，或记为$A_1 A_2 \cdots A_n$

4、事件的差

由事件A发生而事件B不发生所构成的事件，称为事件A与B的差，记为$A-B$。

5、互斥事件与互逆事件

如果事件A与事件B不能同时发生，即

$$AB = \phi$$

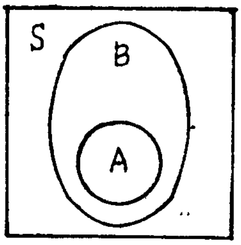
则称事件A与事件B是互不相容（或互斥）事件。基本事件是互不相容的。

如果事件A与B满足以下条件

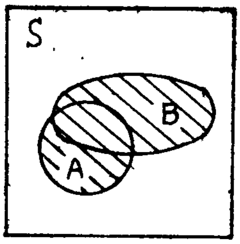
$$A \cup B = S, \ A \cap B = \phi$$

则称事件A与B为互逆事件，又称A是B的对立事件（或B是A的对立事件），记为$A = \overline{B}$（或$B = \overline{A}$）。

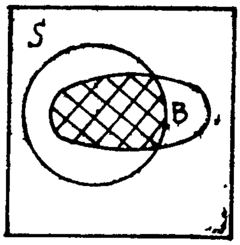
事件的关系和运算也常用图形来直观示意：



$A \subset B$



$A \cup B$



$A \cap B$

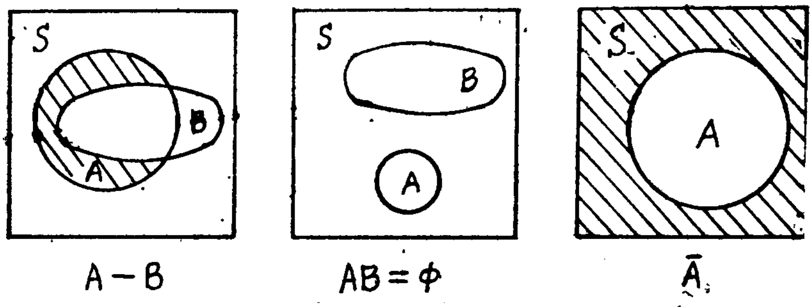


图 1—1

关于事件的运算有下列的基本关系式：

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$；

分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

德莫根公式（对偶公式）

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

分配律和德莫根公式可以推广到任意有限个事件或可数个事件。如

$$(\bigcup_k A_k)\cap C=\bigcup_k(A_k\cap C)；$$

$$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k\overline{A}_k，\qquad \overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k\overline{A}_k。$$

例6　在例2中，令事件A_1：“1号麦种出现＋”，即

$$A_1=\{(+,\ +),\ (+,\ -)\},$$

事件A_2：“两颗麦种都出现＋或都出现－”，即

$$A_2=\{(+,\ +),\ (-,\ -)\},$$

事件A_3：“只有一颗出现＋”，即

$$A_3=\{(+,\ -),\ (-,\ +)\}。$$

求　$A_1\cup A_2=?$　$A_1\cap A_2=?$　$A_1-A_2=?$

解：　$A_1\cup A_2=\{(+,\ +),\ (+,\ -),\ (-,\ -)\}$，

$A_1\cap A_2=\{(+,\ +)\}$。

$A_1-A_2=\{(+,\ -)\}$。

从此例还可看出：因$A_2\cup A_3=S$且$A_2\cap A_3=\phi$，所以事件A_2与A_3是对立事件。

例7　设A_1，A_2，A_3，A_4是四个事件，试用它们表出下列事件：B：“A_1，A_2，

A_3，A_4恰有一个发生”，C：“A_1，A_2，A_3，A_4至多有一个发生”。

解：B=“恰好A_1发生，或恰好A_2发生，或恰好A_3发生，或恰好A_4发生”

而“恰好A_1发生”=“A_1发生，且A_2不发生，且A_3不发生，且A_4不发生”$=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$

类似地 “恰好A_2发生”$=\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4$，

“恰好A_3发生”$=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4$，

“恰好A_4发生”$=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$。

所以

$$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4。$$

C=“A_1，A_2，A_3，A_4都不发生或恰有一个发生”$=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup B$

$$=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$$

例8 如图1—2有一电路，A_i表示事件“继电器接点i闭合”。B表示事件：“R，S”两点间是通路”。

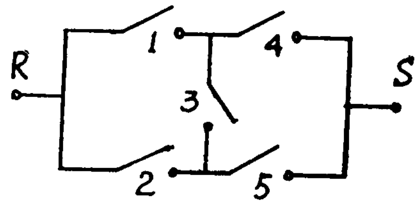


图1—2

解：R，S两点间是通路当且仅当“1，4同时闭合”或“1，3，5同时闭合”或“2，3，4同时闭合”或“2，5同时闭合”。所以。

$$B=A_1A_4\cup A_1A_3A_5\cup A_2A_3A_4\cup A_2A_5$$

§2 随机事件的概率

在生产实践和科学试验中，随机事件是大量地存在着，随机事件虽然有其偶然性的一面，但在多次重复试验中，却呈现出明显的规律性。它出现的可能性大小是可以度量的，随机事件的概率就是标志事件发生可能性大小的一个客观存在的数。例如，自标号为1，2……，10的十颗种子中，任取其一，则“抽得奇数号种子”的可能性显然大于“抽得第5号种子”的可能性。又如，抛一枚硬币，出现正面和反面的可能性是差不多的。这自然使人们想到用一个数字来表示某一事件出现的可能性大小。为此引入概率的概念。

一、概率的古典定义

在这里，我们讨论的是一类简单而常见的随机试验，如“抛硬币”、“掷骰子”等试验，它们满足下述两个条件：

（1）它的样本空间只有有限个基本事件；

（2）每个基本事件出现的可能性相同。

这种随机试验是概率论发展早期的研究对象，称为古典型随机试验，简称古典概

型，也称为等可能概型。

设古典概型的样本空间为$S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,其中各个基本事件$e_i$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$)出现的可能性相同，若事件$A$包含其中的$k$个基本事件，我们给出事件$A$的概率的定义如下：

定义　在古典概型中，**事件A所包含的基本事件数k与基本事件的总数n的比值称为事件A的概率**，记为

$$P(A)=\frac{k}{n}。\qquad（1、2、1）$$

概率的这个定义称为概率的古典定义。

例 1　设箱中有100个零件，其中90个是正品，10个是次品，今从其中任意抽取10个，问都是正品的概率是多少？

解：设抽到10个都是正品这一事件为A，从100个零件中任意抽取10个的方法共有C_{100}^{10}种，由于抽取的任意性，所以每一种取法的可能性是相同的。而取出的10个零件都是正品的取法共有C_{90}^{10}种。所以基本事件的总数为$n=C_{100}^{10}$，事件A所包含的基本事件数为C_{90}^{10},则有

$$P(A)=\frac{k}{n}=C_{90}^{10}\Big/C_{100}^{10}$$

$$=\frac{90!}{10!\ 80!}\div\frac{100!}{10!\ 90!}$$

$$=\frac{90\cdot 89\cdots\cdots\cdots\cdot 81}{100\cdot 99\cdots\cdots\cdots\cdot 91}\approx 0.3305$$

例 2　作试验E：“对编号为1，2，3的三粒麦种作发芽试验”，观察发芽与不发芽的情况，（1）写出E的样本空间；（2）设事件A为“恰有一粒发芽”，求$P(A)$。（3）设事件B为“至少有一粒发芽”，求$P(B)$。

解：（1）E的样本空间为

$S=\{(+,+,+),(+,+,-)(+,-,+),(-,+,+),$
$(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+),(-,-,-)\}$,

（2）　$A=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+)\}$,

因为S中基本事件数为$n=8$,A包含的基本事件数为$k=3$，所以有$P(A)=\frac{3}{8}$。

（3）　$B=\{(+,+,+),(+,+,-),(+,-,+),$
$(-,+,+),(+,-,-),(-,+,-),$
$(-,-,+)\}$。

因为B包含的基本事件数为7，所以有

$$P(B)=\frac{7}{8}$$

二、随机事件的频率；概率的统计定义

上面讲过的。概率的古典定义，其适用范围是有局限性的，它要求试验的样本空间的元素只有有限个，并且每个基本事件出现的可能性相同。可是，在实践中，存在许多随机事件是不具备这两个条件的。因此，我们应当给出一个适合于一般随机现象的概率定义。于是，在概率论的发展中，就进一步产生了概率的统计定义，这一定义的根据是：在多次重复试验中，同一事件发生的频率虽然并不完全相同，但却在一个固定的数值附近摆动，而呈现出一定的稳定性。

1、随机事件的频率

定义　设随机事件A在n次试验中出现n_A次，比值 n_A/n 称为事件 A 在这n次试验中出现的频率。记为

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

事件的频率不是一个固定的数，但是，在多次观察中，我们发现频率具有稳定性，我们看下面的实例。

在相似于大田的条件下，重复地以大量的同一品种水稻种子作发芽试验，观察它的发芽的频率。分别抽取10粒，50粒，100粒，200粒，300粒，400粒种子进行试验。结果如下表：

表1—1

抽取粒数　n	10	50	100	200	300	400
发芽粒数　n_A	8	45	91	180	268	361
发芽频率　n_A/n	0.80	0.90	0.91	0.90	0.893	0.903

从表中可看出，虽然，在抽出的种子中发芽数是随机的，然而，随着抽取粒数的增多，发芽的频率越来越明显地摆动于0.9附近。

频率的性质：设试验的样本空间为S，A与B为两个事件，则在n次试验中的频率具有下列性质：

（1）　$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$

（2）　$f_n(S)=1$，

（3）　如果A，B互不相容，即$AB=\phi$，则有

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)\ 。$$

关于前两个性质的证明请读者自己完成，

〔证〕（3）因为$A\cup B$发生就是A，B中至少有一个发生，又因A，B互不相容，所以在n次试验中$A\cup B$发生的次数必为A发生的次数与B发生的次数之和，即

$$n_{A\cup B}=n_A+n_B$$

从而 $$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$$

这个性质对于随机试验的任意k个两两互不相容的事件A_i（$i=1,2,\cdots,k$）也成立，即有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

即 $$f_n(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$$

事件A在n次试验中出现的频率$f_n(A)$，能一定程度地刻划事件A出现的可能性的大小，而当试验的次数n逐渐增大时，它在一个常数附近摆动，而逐渐稳定于这个常数，这个常数是客观存在的，这就是定义事件的概率的统计定义的客观基础。

2、概率的统计定义

当试验的次数n充分大时，事件A的频率$f_n(A)=n_A/n$在某一个常数附近摆动，则定义事件A的概率为p，并记作

$$P(A)=p\approx\frac{n_A}{n}。$$

概率的这个定义，称为概率的统计定义。

由概率的统计定义可以推得概率的下列性质：

性质1　对于任一事件A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

这是由于频率$\frac{n_A}{n}$总是在区间〔0，1〕上，所以相对应的$p=P(A)$也总在区间〔0，1〕上。

性质2　$P(S)=1$，$P(\phi)=0$。

其中S为必然事件，ϕ为不可能事件

性质3　对于两两互不相容的事件A_k（$k=1,2,\cdots,m\cdots$）有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m\cup\cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)+\cdots$$

这是由于$A_1,A_2,\cdots,A_m,\cdots$两两互不相容，所以$A$，$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_m$，$\cdots$的频率$\frac{n_A}{n}$，$\frac{n_{A_1}}{n}$，$\frac{n_{A_2}}{n}$，$\cdots$满足等式（其中$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m\cup\cdots$，且$n_A=n_{A_1}+n_{A_2}\cdots+n_{A_m}\cdots$）

$$\frac{n_A}{n}=\frac{n_{A_1}}{n}+\frac{n_{A_2}}{n}+\cdots+\frac{n_{A_m}}{n}+\cdots。$$

相应的概率应该满足

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m\cup\cdots)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)+\cdots。$$

三、概率的公理化定义

概率的古典定义是带有局限性的，因为它是以等可能性为基础的，概率的统计定义虽然有一般性而且比较直观，容易理解，但在数学上不够严密。为了使概率这个概念既有一般性又比较严密，下面给出度量事件发生可能性大小的概率的定义。

概率的定义 设随机试验的样本空间为S，对于每一事件A赋予一实数$P(A)$，如果满足下列条件，值$P(A)$就称为事件A的概率：

1）对于每一事件A，有$0 \leq P(A) \leq 1$

2）$P(S)=1$

3）若A_i（$i=1, 2, \cdots$）两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_n)。\quad (1、2、2)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots \quad (1、2、3)$$

即

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\text{；}\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

我们可以直接验证，按古典定义及统计定义规定的概率都符合这定义中的要求。因此，它们都是这个一般定义范围内的特殊情形，

由概率的定义可以推得概率的一些性质：

性质1　设$\overline{A}$是A的对立事件，则

$$P(\overline{A})=1-P(A)。\quad (1、2、4)$$

〔证〕　由于$A \cup \overline{A}=S$，$\overline{A}A=\phi$，根据概率的有限可加性，得

$$P(S)=P(A \cup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

因为$P(S)=1$，则有　$P(A)+P(\overline{A})=1$

故证得　$P(\overline{A})=1-P(A)$，

同样有　$P(A)=1-P(\overline{A})$，

性质2　$P(\phi)=0$

性质3　设A、B为二事件，则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

〔证〕：　首先把$A \cup B$表达成两个互不相容事件A及$(B-A)$的和；把B表达成AB与$(B-A)$的和，由图1—3可看出有下式成立：

$$A \cup B=A \cup (B-A),$$

$$B=AB \cup (B-A),$$

其中$A(B-A)=\phi$，$(AB)(B-A)=\phi$，由概率的有限可加性得

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B-A),$$

$$P(B)=P(AB)+P(B-A)。$$

由第二式可解得

$$P(B-A)=P(B)-P(AB),$$

代入第一式中，便得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

证毕。

对于任意三个事件A，B，C，我们可以证明

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC).$$

性质 4　设A、B为二事件，若$A\subset B$，则$P(A)\leqslant P(B)$。

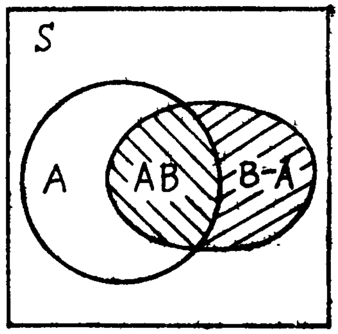


图 1—3

§3　条件概率与事件的独立性

一、条件概率与乘法公式

在实际问题中，我们除了要知道事件A的概率$P(A)$外，有时还需要知道在“事件B已发生”的条件下，事件A发生的条件概率$P(A|B)$。由于增加了新的条件“事件B已发生”，所以$P(A|B)$在一般情况下不等于$P(A)$，而称$P(A|B)$为条件概率。条件概率是一个重要的基本概念，为了明确这个概念，我们先考虑一个具体例子，然后再来分析一下应该怎样定义$P(A|B)$。

市农机公司从甲、乙两厂购进一批同型号高压油泵如下表：

	正　品　数	次　品　数	总　计
甲厂生产	41 $(=n_{AB})$	4	45 $(=n_B)$
乙厂生产	49	6	55
总　计	90 $(=n_A)$	10	100 $(=n)$

用A表示“取得正品”这个事件，今从这100个油泵中任取一个，显然有

$$P(A)=\frac{90}{100}=0.90$$

$$P(B)=\frac{45}{100}=0.45$$

现在，如果不是从100个油泵中抽取，而只是从甲厂生产的45个油泵中随机抽取一个，这时取得正品的概率为41/45，这个概率用一个新符号$P(A|B)$表示。它反映了“从甲厂产品中取”这样一个条件限制，用以区别没有这个条件限制时同一事件的概率$P(A)=\frac{9}{10}$，读做“在B发生（已知取得的油泵是甲厂生产的）的条件下，A发生（取

得正品）的条件概率”，或简称为A对于B的条件概率。同理，B对于A的条件概率记为$P(B|A)$。显然有

$$P(A|B)=\frac{n_{AB}}{n_B}=\frac{n_{AB}/n}{n_B/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{41/100}{45/100}=\frac{41}{45}$$

$$P(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}/n}{n_A/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{41/100}{90/100}=\frac{41}{90}$$

其中$P(AB)$是A与B同时发生的概率，即取得的是甲厂生产的正品的概率。

由此推想在一般情况下可定义条件概率如下：

定义　设A，B是两个事件，且$P(A)>0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1、3、1)$$

为在事件A已发生的条件下，事件B的条件概率。

在古典概型中，设样本空间S由n个基本事件组成，若事件A包含m个基本事件（$m>0$），AB包含k个基本事件，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{k}{m}。$$

由条件概率的定义，立即可以得到：

乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)，当P(A)>0，$$
$$P(AB)=P(B)P(A|B)，当P(B)>0，$$

对于三个事件的情况有：

$$P(ABC)=P\{(AB)C\}=P(AB)P\{C|AB\}$$
$$=P(A)P(B|A)P(C|AB)。$$

故有

$$P\{ABC\}=P(A)P(B|A)P(C|AB)。$$

例1　袋中有两个白围棋子，三个黑围棋子，从中依次取出两个，试求取出的两个棋子都是白子（事件A）的概率。

解：用A_1表示“第一次取白子”，A_2表示“第二次取得白子”，则$A=A_1A_2$。

在A_1已发生时，袋中剩下一个白子三个黑子，所以

$$P(A_2|A_1)=1/4。$$

于是利用乘法公式，得到

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

二、事件的独立性

一般说来，条件概率$P(B|A)$与$P(B)$是不相等的，但是在有些情况下，若两个事件A与B，其中任何一个发生与否，都不影响另一个事件发生的可能性，这时就有