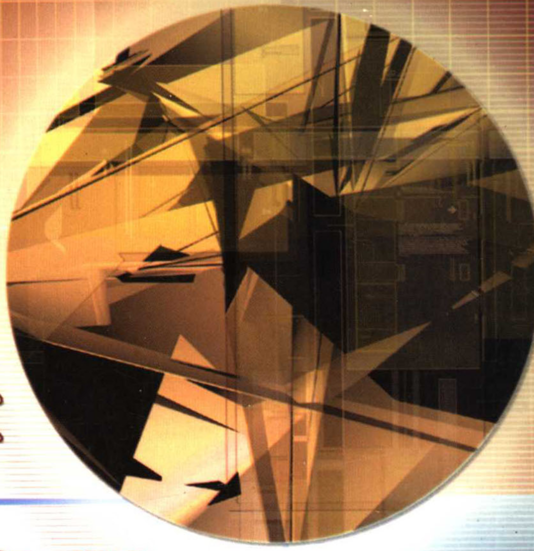
普通高等教育“十五”国家级规划教材



大学数学
——线性代数

吉林大学数学学院
戴天时　陈殿友　主编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学
——线性代数

吉林大学数学学院

戴天时　陈殿友　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》中的一册.系列教材《大学数学》吸收了国内外同类教材的精华,借鉴了近几年出版的一批“面向21世纪课程教材”的成功经验,体现了时代的特点,着重加强基础、强化应用、整体优化、注重后效,力争做到科学性、系统性和可行性的统一,传授数学知识和培养数学素养的统一。在体系与内容的编排上,本书认真考虑不同专业、不同学时的授课对象的需求,对有关内容和习题进行了较好处理.

本书介绍线性代数的基础知识,内容包括:矩阵的运算与初等变换,方阵的行列式,可逆矩阵,线性方程组与向量组的线性相关性,方阵的特征值、特征向量与相似化简,二次型与对称矩阵,线性空间,线性变换,欧氏空间等,书后附习题参考答案.

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生选用,也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.线性代数/戴天时,陈殿友主编.—北京:高等教育出版社,2004.7
普通高等教育“十五”国家级规划教材
ISBN 7-04-014396-8

Ⅰ.大… Ⅱ.①戴…②陈… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第062080号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 李蕊 **封面设计** 于涛
责任绘图 吴文信 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网址	http://www.hep.edu.cn
总机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经销 新华书店北京发行所
印刷 济南新华印刷厂

开本	787×960 1/16	版次	2004年7月第1版
印张	19.25	印次	2004年7月第1次印刷
字数	350 000	定价	20.40元

《大学数学》系列教材编委会

前　言

《大学数学》系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材．本系列教材共四册：《微积分》（上、下）、《线性代数》和《随机数学》．

本系列教材的编写体现了时代的特点．本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到了较好的结合．

本系列教材是在吸取国内外同类教材的精华，借鉴近几年我国出版的一批“面向21世纪课程教材”成功经验结合在吉林大学公共数学教学教研的具体实践，针对非数学类理工科大学生的特点编写的．

本系列教材内容充实，可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书．在教材体系与内容的编排上，认真考虑了不同专业、不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的物理、计算机、电子等专业原则上可讲授本教材的全部内容，其他专业可以在不带“*”号的内容中，根据实际需要选择适当的章节讲授．每章后面所配备的习题分成两类，其中（A）类是体现教学基本要求的习题；（B）类是对基本内容提升、扩展以及综合运用有关知识的习题．较难的题在题号前用“△”号做了标注．与教材中“*”号内容相应的习题用“*”号做了标注．本书的最后给出了习题参考答案或提示，供读者参考．

本册《线性代数》的一至四章由陈殿友编写，五至九章由戴天时编写．

在《大学数学》系列教材的编写过程中，得到了吉林大学教务处的大力支持．数学学院尹景学教授为本套教材初稿的版面设计、软件培训提供了悉心的技术指导；公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作；研究生王军林、孙鹏、任长宇、李明、柯长海、吴刚、姜政毅及湖北大学郑巧仙老师完成了本系列教材初稿的排版制图工作，在此一并致谢．作者要特别感谢高等教育出版社高等理科分社的领导和编辑们，他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持．

由于我们水平所限，书中的错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正，以期不断完善．

《大学数学》系列教材编委会

2004年5月

目　录

第一章　矩阵的运算与初等变换

矩阵是数学中最重要的基本概念之一，是代数学研究的主要对象，也是数学很多分支研究及应用的重要工具，它贯穿于线性代数的各个部分．在很多领域中的一些数量关系都可以用矩阵来描述．

本章主要介绍矩阵的概念、性质和运算．并把向量视为特殊的矩阵，自然地引进向量概念及其线性运算．还将介绍矩阵的初等变换及分块矩阵等相关知识，为后面的学习打下扎实的理论基础．

§1　矩阵与向量的概念

1.1　矩阵的概念

考察线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4, \end{cases}$$

它是由三个方程所组成，每个方程中含有三个未知量 x_1, x_2, x_3. 今隐去三个方程中未知量 x_1, x_2, x_3 和等号“$=$”，分离出各未知量的系数和常数项，上述线性方程组可简化成如下数表

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{matrix}$$

在已知约定未知量 x_1, x_2, x_3 的情况下，上面的数表可完全代表上述的线性方程组，而且形式更简捷明了．数表中的横排称为 **行**，竖排称为 **列**．称上述数表为 3 行 4 列的矩阵．一般地，我们有如下定义．

定义 1.1　由 $m \times n$ 个数排成 m 个行 n 个列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做 m **行** n **列的矩阵**, 或称 $m\times n$ **矩阵**. 通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 表示. 有时也记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \qquad \text{或} \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},$$

其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素, 简称 (i,j) 元. 元素为实数的矩阵称为 **实矩阵**. 元素为复数的矩阵称为 **复矩阵**. 本书中的矩阵除特别声明外, 都指实矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 m 行 n 列的矩阵, 则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 **同型矩阵**.

若两个矩阵同型, 并且对应元素相等, 即对 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 有

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$**相等**, 记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

$m\times n$ 个元素全为零的矩阵称为 **零矩阵**, 记作 $\boldsymbol{O}$.

当 $m=1$ 时, 称 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 为 **行矩阵**.

当 $n=1$ 时, 称 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 为 **列矩阵**.

当 $m=n$ 时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶方阵**, 并将 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 简记为 $\boldsymbol{A}_n$(一阶方阵等同于构成它的元素).

矩阵的理论具有广泛的应用, 很多数量关系都可以用矩阵来刻画.

例 1.1 某公司对四名应聘人员进行三项素质考评的百分制成绩可用矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

表示, 其中 a_{ij} 为第 i 名应聘者的第 j 种素质考评的成绩.

公司中甲、乙两类岗位对各项素质要求的权重系数也可用矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

表示, 其中 b_{ij} 为第 i 类岗位对第 j 种素质要求的权重系数 (这时一般要求 $\sum\limits_{i=1}^{3}b_{i1}=\sum\limits_{i=1}^{3}b_{i2}=1$).

1.2 向量的概念

定义 1.2 n 行 1 列的矩阵称为 n 维**列向量**. 1 行 n 列的矩阵称为 n 维**行向量**, n 维列向量与 n 维行向量统称为 n**维向量**, 简称**向量**. 常用来表示向量的记号有 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$等.

例如

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$$

是一个 3 维的行向量，而

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

是一个 n 维列向量.

向量是特殊的矩阵，即一行或一列的矩阵. 因此，按矩阵相等和零矩阵的定义，可得两个向量相等和零向量的概念，零向量记作 $\mathbf{0}$. n 维向量实质上是一个 n 元有序数组，它的第 i 个元素又称为向量的第 i 个**分量**.

第 i 个分量为 1, 其余分量均为 0 的 n 维列向量称为一个 n 维 **基本列向量**.

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

是互不相同的 n 个 n 维基本列向量. 类似地,

$$\boldsymbol{f}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{f}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{f}_n=(0,0,\cdots,1)$$

是 n 个不同的 n 维基本行向量. 二者统称 n 维基本向量组.

显然， n 个 n 维基本列向量 (或 n 维基本行向量) 可排成一个 n 阶方阵

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

我们称 $\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶的 **单位矩阵**, 简记为 $\boldsymbol{E}$. 该方阵的特点是：从左上角到右下角的直线 (叫做 **主对角线**) 上的元素都是 1, 其他的元素都是 0. 即单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的

(i,j) 元为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当 i=j,\\ 0, & 当 i\neq j.\end{cases}$$

习 题 1.1

(A)

1. 某纺织品公司所属 3 家服装厂为其生产衬衣、长裤和外套. 设一卷布在一厂可生产 20 件衬衣、 10 条长裤和 5 件外套, 而二厂与三厂生产量分别为 4, 18, 7 和 2, 5, 16, 试用矩阵来表示该公司生产这三种服装的情况.

2. 设甲省两个城市 a_1,a_2 和乙省三个城市 b_1,b_2,b_3 的交通路线如图 1 所示, 而乙省三城市 b_1,b_2,b_3 与丙省两城市 c_1,c_2 的交通路线如图 2 所示, 其中每条线上的数字表示联结该两城市的不同道路的总数.

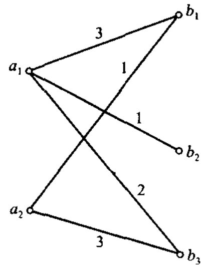


图 1

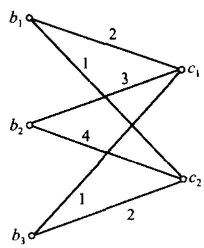


图 2

试用矩阵表示甲、乙两省及乙、丙两省城市间的通路信息.

§2 矩阵的运算

2.1 矩阵加法

定义 2.1 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}.$$

必须注意: 只有同型矩阵才能相加, 且它们的和仍是与它们同型的矩阵.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 记

$$-\boldsymbol{A}=(-a_{ij}).$$

则称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **负矩阵**. 显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

两个同型矩阵的减法定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

不难验证, 矩阵加法满足下列运算规律 (设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵):

i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

iii) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{O}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵.

例 2.1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & y \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, 求 x,y.

解 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$, 即

$$\begin{bmatrix} x-1 & -1+y \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以 $x=2, y=0$.

2.2 数乘矩阵

定义 2.2 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$, 规定

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix},$$

即数乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等于用这个数 λ 遍乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素.

数乘矩阵满足下列运算规律 (设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵, λ,μ 为数):

i) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$;

ii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

iii) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

iv) $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

通常我们把矩阵加法和数乘这两种运算统称为矩阵的 **线性运算**.

例 2.2 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\2&3&-1&2\\-1&2&1&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2&1&0&1\\1&1&1&1\\3&0&2&1\end{bmatrix},$$

求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 由定义 2.2, 有

$$3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&3&6\\6&9&-3&6\\-3&6&3&9\end{bmatrix},\quad 2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-4&2&0&2\\2&2&2&2\\6&0&4&2\end{bmatrix},$$

故

$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7&-2&3&4\\4&7&-5&4\\-9&6&-1&7\end{bmatrix}.$$

2.3 矩阵乘法

在给出矩阵的乘法定义之前, 我们先给出两个特殊矩阵之间的一种"对乘加"运算法则: 设 $\boldsymbol{x}$ 为 $1\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{y}$ 为 $n\times 1$ 矩阵, 规定 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的乘积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{xy}&=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}\\&=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.\end{aligned}$$

称此运算为行矩阵 $\boldsymbol{x}$ 与列矩阵 $\boldsymbol{y}$ 的 **"对乘加"法则**.

定义 2.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $n\times p$ 矩阵, 那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 其中 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的"对乘加", 即

$$\begin{aligned}c_{ij}&=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\\&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\qquad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,p.\end{aligned}$$

并把此乘积矩阵记作

$$C = AB.$$

由定义 2.3 可知，只有当前一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于后一矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，两个矩阵才能相乘，此时也说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有可乘性. 乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与 $\boldsymbol{A}$ 的行数一致，列数与 $\boldsymbol{B}$ 的列数一致.

例 2.3 求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 3×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×2 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，其乘积 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ 是一个 3×2 的矩阵. 按定义有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4\times 1+(-1)\times 0+2\times 3 & 4\times 2+(-1)\times 1+2\times 0 \\ 1\times 1+1\times 0+0\times 3 & 1\times 2+1\times 1+0\times 0 \\ 0\times 1+3\times 0+1\times 3 & 0\times 2+3\times 1+1\times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 2.4 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

求矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解 按定义有

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{f}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 是基本行向量和基本列向量, 它们分别是 $1\times m$ 矩阵和 $n\times 1$ 矩阵. 显然

$$\boldsymbol{f}_i\boldsymbol{A}=(0,\cdots,1,\cdots,0)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}).$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$, 容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\qquad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

或简单写成

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}.$$

可见单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的作用类似数 1 在数的乘法中的作用.

上面各例表明, 矩阵的乘法不满足交换律, 即在一般的情形下, $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 在例 2.3 中, $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 3×2 矩阵, 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义, 而 $\boldsymbol{BA}$ 却没有意义. 由此可知, 在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序. $\boldsymbol{AB}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, $\boldsymbol{BA}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$ 的乘积. 在例 2.4 中, 虽然 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义, 但 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$, 而且例 2.4 还表明, 矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$, 但却有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 这就提醒读者要特别注意: 若有两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论; 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$, 也不能得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$ 的结论.

矩阵的乘法运算虽然不满足交换律, 但仍满足下列结合律和分配律 (假设运算都是可行的):

i) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

ii) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$(其中 λ 是数);

iii) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.