FUSHU

复数

张鸿顺

河北人民出版社

复　　数

张 鸿 顺

河 北 人 民 出 版 社

一九八三年·石家庄

责任编辑：杨士蕙

封面设计：赫福录

复　　数

张鸿顺

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）

沧州地区印刷厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 3 1/4印张 74,000字 印数：7,051—15,250 1982年9月第1版
1983年9月第2次印刷 统一书号：7086·1103 定价：0.30元

前　　言

复数来源于解方程的需要，但是在人们认识了复数的几何意义，找到了复数的物理模型之后，把复数看成是平面上的点或向量等等，对于复数的研究才得到了迅速的发展。

这本小册子里先介绍向量再引入复数，而且自始至终把复数、平面上的点、平面上的向量三者紧密地联系起来，使读者在明确复数的概念和运算的同时，认识它们的几何意义，从而进一步灵活地运用复数这一工具解决有关的问题。

这本小册子是根据教育部制定的全日制三三制中学数学教学大纲的精神，为高中学生而编写的课外读物，也可作为青年教师的教学参考书。在某些内容的要求上略高于教学大纲。这也是为了使读者能更系统地掌握有关复数的知识，并为进一步学习高等数学打好基础。

限于编者的水平，难免有不妥之处，欢迎批评指正。

书中的插图是由田守拙同志绘制的，在此致以谢意。

编　者

目　　录

第一章　向　　量

§1.1　向量的概念

我们在日常生活中会遇到各种各样的量，其中有的量完全可以由它的数值的大小来决定，如长度、面积、体积等等，而有的量就不能只由它的数值的大小来决定，还必须指明它的方向，如力、速度、位移等等．凡是只有数值的大小的量叫做**数量**（或**纯量**）；既有数值的大小，又有方向的量叫做**向量**．通常用希腊字母 $\alpha, \beta, \cdots$ 或者在小写英文字母的上方加上一个箭头，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$，…来表示向量．在几何中，有向线段是既有数值的大小，又有方向的量，它是最直观的向量，因此常用有向线段来表示向量，如 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，…

向量 $\overrightarrow{AB}$（或 $\vec{a}$ 或 α）的大小就是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度（即 $|AB|$），叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的**模**（或**绝对值**），记作 $|\overrightarrow{AB}|$（或 $|\vec{a}|$ 或 $|\alpha|$）．向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向就是由 A 到 B 的方向，其中 A 叫做向量的始点，B 叫做向量的终点．也就是说向量的方向是由始点到终点所表示的方向．

如果两个向量的方向相同，那么表示这两个向量的有向线段或者在同一直线上，或者平行，如图 1-1 中 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$ 同

向.

与$\overrightarrow{AB}$方向相同的有向线段都与$\overrightarrow{BA}$的方向相反. 显然，两个方向相反的向量也是或者在同一直线上，或者平行，如图 1-2 中，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{EF}$都与$\overrightarrow{AB}$反向. 这也说明了平行的有向线段不一定同向，它们可能同向也可能反向.

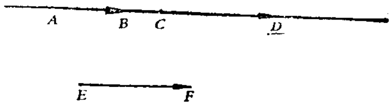


图 1-1

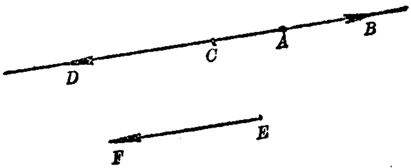


图 1-2

如果一个向量的始点与终点重合，那么这个向量叫做**零向量**，记作$\vec{0}$或$\overrightarrow{AA}$.

显然零向量的长度为 0，即$|\vec{0}| = 0$，而且零向量的方向不确定.

注意$\vec{0}$与 0 不同，前者是向量，后者是数 0.

我们把模相等、方向相同的向量叫做**相等的向量**. 如果α和β是相等的向量，就记作$\alpha=\beta$. 由定义可知

$$\alpha=\beta \Longleftrightarrow |\alpha| = |\beta|\text{，且 }\alpha\text{ 与 }\beta\text{ 同向.}$$

这样，无论向量的始点在什么位置，只要它们的模相等而且方向相同，它们就是相等的. 因此，一个向量可以平移到任何一个位置（即始点可以任意选择）. 如在图 1-3 中有

$$\alpha = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \cdots.$$

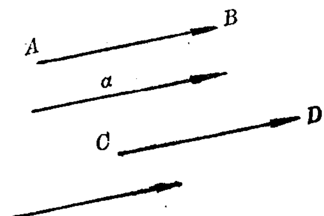


图 1-3

我们把模相等、方向相反

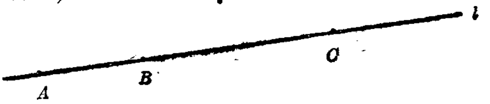
的向量叫做互为反向量，并且把$\vec{a}$的反向量记作$-\vec{a}$。

显然，$\overrightarrow{AB}$的反向量是$\overrightarrow{BA}$，因此

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}.$$

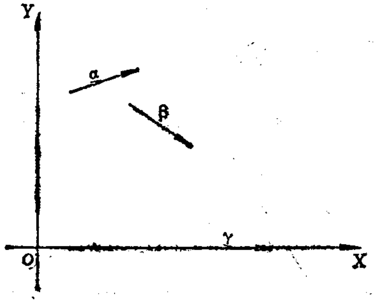
练习

1. 如图1-4，A, B, C都在l直线上，试求出D点和E点分别使$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$；$\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AB}$。



（图 1-4）

2. 如图1-5，在直角坐标系中，分别作出与α，β，γ相等的，并且以点O为始点的向量。



（图 1-5）

§1.2 向量的加法

两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$相加，就是把$\vec{a}$的始点放在任意一个位置，再把$\vec{b}$的始点放在$\vec{a}$的终点上（如图1-6），这时以$\vec{a}$的始点为

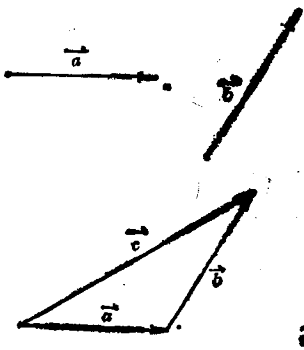
始点，以$\vec{b}$的终点为终点的向量$\vec{c}$，叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记作$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。

这个定义包括了$\vec{a}$与$\vec{b}$在同一直线上的情况。

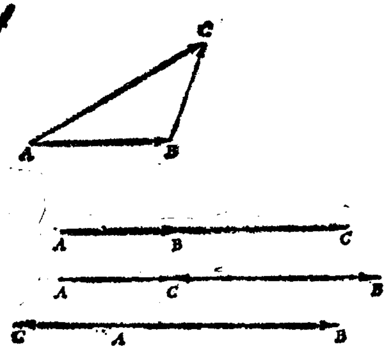
我们也可以这样来理解：某船由点A出发，沿AB方向直线前进到达B，再由B沿BC方向直线前进到达C，最后结果相当于由A出发沿AC方向直线前进到达C（如图1-7)，于是就有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

显然这个结论包括了A，B，C在同一直线上的情况（如图1-7)。



（图 1-6）



（图 1-7）

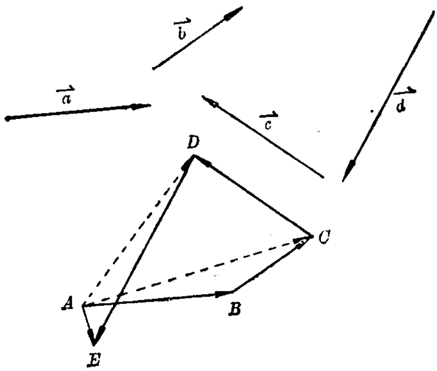
由图1-6可以看出，当$\vec{a}$与$\vec{b}$不在同一直线上时，$\vec{c}$与$\vec{a}$和$\vec{b}$构成一个三角形，$\vec{a}$和$\vec{b}$为两个边而$\vec{c}$是第三边，因此这种求两个向量的和的方法叫做三角形法。

三角形法便于用来求n个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的和.也就是先

任选一点A作为α_1的始点，然后使$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$顺次首尾相接，用前一个向量的终点作为后一个向量的始点，如果α_n的终点是B，那么

$$\overrightarrow{AB}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n.$$

例1　已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$如图1-8，求它们的和。



（图 1-8）

解：作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，$\overrightarrow{DE}=\vec{d}$，于是

$$\begin{aligned}&\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

向量加法有以下性质：

(1)　任何一个向量与零向量的和还是它自身，即

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}.$$

因为，根据和的定义，我们有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB};$$

$$\overrightarrow{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.$$

(2)　互为反向量的和是零向量，即

$$\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}.$$

这是因为　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.

(3) 交换律成立，即

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}.$$

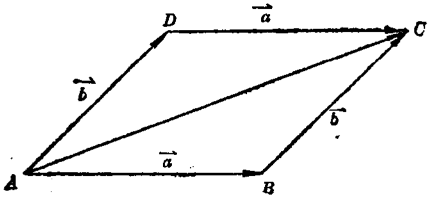
我们分几种情况来考虑。

如果 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 之中有一个是零向量，不妨设 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$，由

$$\overrightarrow{0}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{0},$$

可知交换律成立。

如果 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 不在同一直线上，那么作平行四边形 $ABCD$，使 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$（如图1-9），由三角形法，在



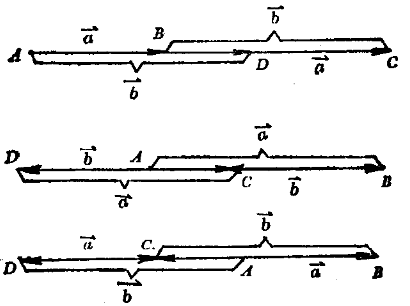
（图 1-9）

ΔABC 中有　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$,

又在 ΔADC 中有　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$,

所以 $$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

又因为当 A，B, C 在同一直线上时，$AB+BC=AC$ 也成立，所以当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 在同一直线上时，仍旧可作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，如图1-10，这时交换律也成立。



(图 1-10)

这样，不论 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的位置如何，加法交换律都成立。

由图 1-9 还可以看出 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.这就告诉我们，求两个有相同始点而不在同一直线上的向量和时，可以用这两个向量为邻边作平行四边形，那么过始点的对角线所表示的向量就是所求的和。这种求两个向量的和的方法叫做平行四边形法。

(4) 结合律成立，即
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 中有零向量时，结合律显然成立。

如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 不在同一直线上，

设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，(如图 1-11)

那么 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

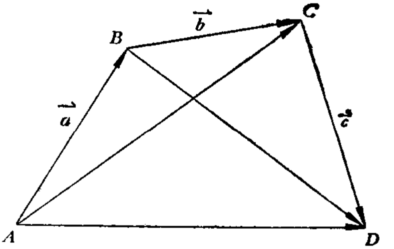
$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$,

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$,



（图 1-11）

所以 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

这个证明过程也适用于$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$在同一直线上的情况，即不论 A, B, C, D 在同一直线上的位置如何，结合律都成立。

由于向量加法的交换律与结合律都成立，因此几个向量相加时，可以不受顺序的限制先加其中的任何两个向量。

例2 计算$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{a})+(-\vec{c})$.

解： $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{a})+(-\vec{c})$

$=\left[\vec{a}+(-\vec{a})\right]+\vec{b}+\left[\vec{c}+(-\vec{c})\right]$

$=\vec{0}+\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$.

如果 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，我们就说$\vec{c}$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，记作 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$.

由于 $\left[\vec{a}+(-\vec{b})\right]+\vec{b}=\vec{a}+\left[(-\vec{b})+\vec{b}\right]$

$=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,

所以 $\vec{a}+(-\vec{b})$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

这就是说，一个向量减去另一个向量等于加上另一个向量的反向量。

特殊情况有 $\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

这样，求向量差的问题就可以变为求向量和的问题，因此，可以用求向量和的方法来求向量差。

例3 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$(如图 1-12)，求$\vec{a}-\vec{b}$.

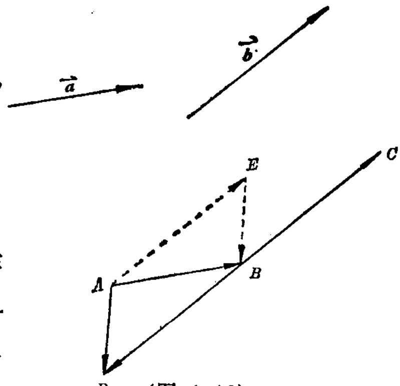
解 作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BD}=-\vec{b}$.(如图 1-12)，

于是 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD})$

$$=\vec{a}+(-\vec{b})$$

$$=\vec{a}-\vec{b}.$$

我们也可以这样作，作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$，(如图 1-12)，再以$\overrightarrow{AE}$为一边，$\overrightarrow{AB}$为对角线作平行四边形$ADBE$，



(图 1-12)

那么另一边$\overrightarrow{AD}$就是$\vec{a}-\vec{b}$. 这是因为由求和的平行四边形法可知

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}, \text{ 即 } \vec{a}=\vec{b}+\overrightarrow{AD}$$

由差的定义可得 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$.

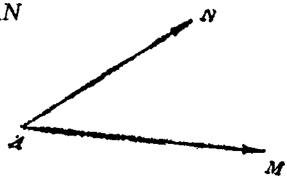
这就是求两个向量的差的平行四边形法。

当然我们还可以用求和的三角形法来求差。在图 1-12 中可以看出$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EB}$，因此只要作出$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$，那么，连$EB$，就有$\overrightarrow{EB}=\vec{a}-\vec{b}$. 这就是求两个向量的差的三角形法。

由 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$可以得出：

同一个始点（A）的两个向量的差等于以第二个向量的终点为始点（E），而以第一个向量的终点（B）为终点的向量。

例 4　如图 1-13，求$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$与$\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$。



（图 1-13）

解：连 MN，则有

$$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM};$$
$$\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}.$$

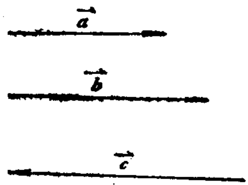
练习

1．如果$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$如图 1-14，作出

(1)　$\vec{a}+\vec{c}$；　(2)　$\vec{b}-\vec{c}$；

(3)　$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$与$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$；

(4)　$\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})$与$\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$。



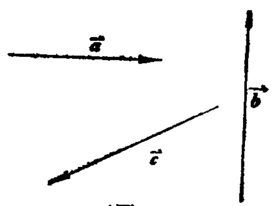
（图 1-14）

2．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$如图 1-15，作出

(1)　$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}-\vec{a}$；

(2)　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$与$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$；

(3)　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$与$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$。



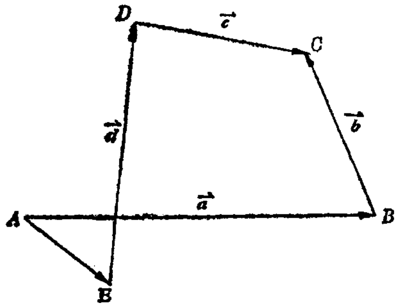
（图 1-15）

3．试用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$表示图 1-16 中的$\overrightarrow{AE}$。

4．设 $ABCDE$ 是五边形，

证明　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$。

5．已知△ABC，试用下列各题中的前两个向量的和或差以及



（图 1-16）

反向量表示第三个向量．（例如对于$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}$应回答为$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$）

(1)　$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AB}$；　(2)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}$；

(3)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$；　(4)　$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CB}$。

§1.3　向量与数的乘法

我们规定实数k与向量a的乘积即$k\cdot a$(或$a\cdot k$)，是这样的一个向量，它的模等于a的模乘以k，它的方向由k来决定：当k是正数时与a同向；当k为负数时与a反向；当k为0时，它是零向量，方向不确定。

由定义可知，当k为正实数且$|\overrightarrow{AB}|=k\cdot|\overrightarrow{CD}|$时，

如果$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$同向，则有　　$\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$；

如果$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$反向，则有　　$\overrightarrow{AB}=-k\cdot\overrightarrow{CD}$。（如图1-17）

例1　已知$\vec{a}$，作出$\frac{2}{3}\vec{a}$；$-2\vec{a}$。